

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RENATO AUGUSTO FREY SABATO

Simulação do sistema pistão-biela-manivela com mancais
hidrodinâmicos curtos em um compressor alternativo

São Paulo
10 de novembro de 2010

RENATO AUGUSTO FREY SABATO

**Simulação do sistema pistão-biela-manivela com mancais
hidrodinâmicos curtos em um compressor alternativo**

Trabalho de Formatura do Curso de Engenharia
Mecânica da Escola Politécnica da USP

Área de Concentração: Eng. Automotiva

Orientador: Prof. Dr. Demetrio Cornilius
Zachariadis

São Paulo
10 de novembro de 2010

Sabato, Renato Augusto Frey
Simulação do sistema pistão-bielâ-manivela com mancais hidrodinâmicos curtos em um compressor alternativo / R.A.F.
Sabato. – São Paulo, 2010.
104 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Mancais (Simulação) 2. Compressores térmicos 3. Simulação de sistemas 4. Atrito 5. Lubrificação I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

RESUMO

No trabalho realiza-se a simulação de um sistema pistão-biela-manivela, com mancal e juntas hidrodinâmicos curtos, a fim de se investigar o atrito viscoso nestes presentes. Inicialmente realiza-se uma modelagem de um sistema simplificado, simulado em scilab para se entender o comportamento dos componentes principais do sistema, e comparar com a modelagem completa, simulado no software ADAMS da MSC. O trabalho mostra que a excentricidade e o atrito viscoso presente no mancal e nas juntas é altamente dependente dos fatores construtivos dos mesmos, como o seu comprimento, raio e folga radial, assim como da viscosidade do óleo utilizado. O trabalho mostra também as diferenças de simulação entre os dois softwares utilizados, porém a modelagem utilizada se restringe para mancais hidrodinâmicos curtos.

ABSTRACT

In this report a simulation of the piston, connecting rod and camshaft system is done with the short bearing model, to investigate the viscous friction among them. Initially the modeling of a simplified system is done, and simulated in scilab, to understand the response of the main components of the system, and also to compare to the full modeling, simulated with the software ADAMS from MSC. The work shows that the eccentricity and friction of the bearing and joints is highly dependent on the constructive factors of such components, such as length, radius, radial clearance, and oil viscosity used. The work also shows the differences on the simulation of both softwares used, however the modeling is restricted to short bearings.

Índice

1. Introdução.....	10
1.1. Contexto.....	10
1.2. Compressores	10
1.3. Justificativa.....	14
2. Revisão Bibliográfica.....	16
2.1. Vínculos, graus de liberdade e coordenadas generalizadas.....	16
2.2. Graus de liberdade de um corpo rígido.....	18
2.3. Trabalhos Virtuais.....	20
2.4. Algumas relações importantes	21
2.5. Equações de Lagrange.....	22
2.6. Energia cinética.....	25
2.6.1. Relação entre velocidades de um corpo rígido.....	25
2.6.2. Posição de centro de massa de um corpo rígido	26
2.6.3. Matriz de inércia de um corpo rígido.....	26
2.7. Relação p-V na câmara	28
2.7.1. Equações de Estados dos Gases, Fator de Compressibilidade e Equação dos Gases Perfeitos.....	28
2.7.2. Processos Politrópicos.....	30
2.8. Modelo de Mancais hidrodinâmicos curtos	31
3. Modelagem do Sistema.....	34
3.1. Sistema 1: pistão-manivela, com torque externo linear.....	34
3.2. Sistema 2: Sistema 1 considerando a pressão do ar, gás perfeito e isotérmico.....	37
3.3. Sistema 3: pistão-biela-manivela e esforços externos do sistema 2.....	42
3.4. Sistema 4: pistão-biela-manivela com pressão do ar, considerando gases perfeitos e sistema adiabático.....	46
3.5. Sistema 5: pistão-biela-manivela, com torque externo linear e mancal não rígido.....	48
3.6. Sistema 6: pistão-biela-manivela, com torque externo linear e 3 mancais não rígidos.....	52
3.7. Sistema 7: pistão-biela-manivela com pressão do ar, considerando gases perfeitos e sistema adiabático, com torque externo proveniente de um motor elétrico de indução monofásico e 3 mancais não rígidos.....	53
3.8. Sistema 8: sistema 7 mais atrito viscoso proveniente dos mancais hidrodinâmicos.....	55
4. Simulações.....	56
4.1. Simulações do Sistema 1.....	56
4.2. Simulações do Sistema 2.....	60
4.3. Simulações do Sistema 3.....	64
4.4. Simulações do Sistema 4.....	66
4.5. Simulações do Sistema 5.....	68
4.6. Simulações do Sistema 6.....	70
4.7. Simulações do Sistema 7.....	74
4.8. Simulações do Sistema 8.....	78
5. Resultados.....	90
6. Conclusões.....	97
7. Bibliografia.....	98
Anexos.....	100

Lista de Figuras

Figura 1: Diagrama dos principais componentes de um compressor alternativo.....	12
Figura 2: Compressores multiestagiados: a) Compressor de dois estágios; b) Compressor de três estágios vertical; c) Compressor de três estágios horizontal.....	13
Figura 3: Compressores Policilíndricos: a) Cilindros em V; b) Cilindros em duplo V; c) Cilindros em ângulo reto.....	13
Figura 4: Partícula livre para percorrer a borda de um cilindro.....	18
Figura 5: Esquema de um mancal não rígido.....	32
Figura 6: Sistema 1.....	34
Figura 7: Diagrama de blocos do SCICOS para o sistema 1.....	37
Figura 8: Sistema 2.....	38
Figura 9: Diagrama P-V do ar na câmara (gás perfeito).....	39
Figura 10: Diagrama de blocos do SCICOS para o sistema 3.....	42
Figura 11: Sistema 3.....	43
Figura 12: Diagrama de blocos do SCICOS para o sistema 3.....	45
Figura 13: Super Bloco do sistema 3.....	46
Figura 14: Sistema 5.....	48
Figura 15: Forças do mancal no volante.....	49
Figura 16: Sistema 6.....	53
Figura 17: Curvas de Torque x Rotação para as diferentes categorias de motores da Weg.....	54
Figura 18: Torque x Rotação do Steel Motor NEMA 56, 0,18kW.....	55
Figura 19: Simulação do Sistema 1.....	56
Figura 20: Sistema 1, com $J_v = 0,01 \text{ kg m}^2$	57
Figura 21: Sistema 1, com $J_v = 0,001 \text{ Kg m}^2$	57
Figura 22: Sistema 1, com $M_p = 5 \text{ kg}$	58
Figura 23: Sistema 1, com $M_p = 0,1 \text{ kg}$	58
Figura 24: Sistema 1, com $l = 0,15\text{m}; e = 0,02\text{m}$	59
Figura 25: Sistema 1, com $l = 0,075\text{m}; e = 0,0275\text{m}$	60
Figura 26: Simulação do Sistema 2.....	61
Figura 27: Sistema 2, com $P_{max} = 240\,000 \text{ N/m}^2$	62
Figura 28: Sistema 2, com $P_{max} = 190\,000 \text{ N/m}^2$	62
Figura 29: Sistema 2, com $D = 0,045\text{m}$	63
Figura 30: Sistema 2, com $D = 0,02\text{m}$	63
Figura 31: Simulação do Sistema 3.....	64
Figura 32: Sistema 3, com $M_b = 10 \text{ kg}$	65
Figura 33: Sistema 3, com $J_b = 0,03 \text{ kg m}^2$	65
Figura 34: Sistema 3, com $J_b = 0,1 \text{ kg m}^2$	65
Figura 35: Simulação do sistema 4 com $k = 1,4$	66
Figura 36: Simulação de 1 segundo do sistema 3 (com os parâmetros antes fornecidos).....	67
Figura 37: Simulação de 1 segundo do sistema 4 (com os parâmetros antes fornecidos).....	67
Figura 38: Ângulo do volante com relação ao tempo.....	68
Figura 39: Velocidade angular do volante com relação ao tempo.....	69
Figura 40: Excentricidade do centro de rotação volante.....	69
Figura 41: Órbita da posição do centro de rotação do volante.....	70
Figura 42: Velocidade Angular do volante em relação ao tempo.....	71
Figura 43: Excentricidade do Contato Mancal/Volante.....	71
Figura 44: Excentricidade do Contato Volante/Bielas.....	72
Figura 45: Excentricidade do Contato Biela/Pistão.....	72
Figura 46: Órbita da Excentricidade do Contato Mancal/Volante.....	73

Figura 47: Órbita da Excentricidade do Contato Volante/Biela.....	73
Figura 48: Órbita da Excentricidade do Contato Biela/Pistão.....	74
Figura 49: Velocidade angular do volante em relação ao tempo.....	75
Figura 50: Excentricidade do Contato Mancal/Volante.....	75
Figura 51: Excentricidade do Contato Volante/Biela.....	76
Figura 52: Órbita da Excentricidade do Contato Mancal/Manivela.....	76
Figura 53: Órbita da Excentricidade do Contato Manivela/Biela.....	77
Figura 54: Excentricidade do Contato Biela/Pistão.....	77
Figura 55: Órbita da Excentricidade do Contato Biela/Pistão.....	78
Figura 56: Velocidade angular do volante.....	78
Figura 57: Ângulo de rotação do volante.....	79
Figura 58: Excentricidade do contato Mancal/Volante.....	79
Figura 59: Excentricidade do contato Volante/Biela.....	80
Figura 60: Excentricidade do contato Biela/Pistão.....	80
Figura 61: Torque viscoso do contato Mancal/Volante.....	81
Figura 62: Torque Viscoso do contato Volante/Biela.....	81
Figura 63: Torque viscoso do contato Biela/Pistão.....	82
Figura 64: Torque Fornecido pelo Motor Elétrico.....	82
Figura 65: Potência Fornecida pelo Motor Elétrico.....	83
Figura 66: Energia Fornecida pelo Motor Elétrico.....	83
Figura 67: Velocidade Angular do Volante.....	84
Figura 68: Ângulo de rotação do volante.....	84
Figura 69: Ecentricidade do contato Mancal/Volante.....	85
Figura 70: Excentricidade do contato Volante/Biela.....	85
Figura 71: Excentricidade do contato Biela/Pistão.....	86
Figura 72: Atrito viscoso do contato Mancal/Volante.....	86
Figura 73: Atrito viscoso do contato Volante/Biela.....	87
Figura 74: Atrito viscoso do contato Biela/Pistão.....	87
Figura 75: Torque Fornecido pelo Motor Elétrico.....	88
Figura 76: Potência Fornecida pelo Motor Elétrico.....	88
Figura 77: Energia Fornecida pelo Motor Elétrico.....	89
Figura 78: Velocidade Angular do volante.....	90
Figura 79: Ângulo de Rotação do Volante.....	90
Figura 80: Torque Fornecido pelo Motor Elétrico.....	91
Figura 81: Potência Fornecida pelo Motor Elétrico.....	91
Figura 82: Energia Fornecida pelo Motor Elétrico.....	91
Figura 83: Esforços na direção X no contato Mancal/Manivela para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos.....	92
Figura 84: Esforços na direção X no contato Mancal/Manivela para o modelo com mancais ideais	93
Figura 85: Esforços na direção Y no contato Mancal/Manivela para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos.....	93
Figura 86: Esforços na direção Y no contato Mancal/Manivela para o modelo com mancais ideais	93
Figura 87: Esforços na direção X no contato Manivela/Biela para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos.....	94
Figura 88: Esforços na direção X no contato Manivela/Biela para o modelo com mancais ideais....	94
Figura 89: Esforços na direção Y no contato Manivela/Biela para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos.....	94
Figura 90: Esforços na direção Y no contato Manivela/Biela para o modelo com mancais ideais....	95
Figura 91: Esforços na direção X no contato Biela/Pistão para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos.....	95

Figura 92: Esforços na direção X no contato Biela/Pistão para o modelo com mancais ideais.....	95
Figura 93: Esforços na direção Y no contato Biela/Pistão para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos.....	96
Figura 94: Esforços na direção Y no contato Biela/Pistão para o modelo com mancais ideais.....	96
Figura 95: Variáveis Construtivas.....	101
Figura 96: Construção de Sólidos.....	103
Figura 97: Measures.....	105
Figura 98: State Variables.....	106
Figura 99: Forças Externas.....	108
Figura 100: Controle de Simulação.....	109
Figura 101: Post Processor.....	110

1. Introdução

1.1. Contexto

Como diversos autores citam, as técnicas de compressão de ar, já estão presentes há milhares de anos antes de Cristo. Clumský (1965) cita algumas aplicações antigas da utilização de ar comprimido, como instrumentos musicais de sopro, ar comprimido para pessoas submersas na água (por uma mangueira de couro), instrumento de sopro para aumentar a brasa em fogueiras e até os primeiros modelos de órgãos musicais.

Os primeiros compressores alternativos acionados a vapor apareceram na segunda metade do século 18, e ficaram muito mais populares com a invação das furadeiras movidas a ar comprimido. Alguns dos motivos pela clara preferência por ar comprimido para o acionamento de furadeiras eram o aumento da eficiência (pode se armazenar ar comprimido a temperaturas baixas, sem perde de energia, ao passo que o vapor possui complicações pela alta temperatura), e a segurança quando comparada ao vapor (também advindo das baixas temperaturas do ar comprimido). Com o aumento das aplicações do ar comprimido na indústria, surgiram, no início do século 20, os primeiros turbocompressores.

Os compressores dinâmicos possibilitaram uma maior aplicação industrial onde são necessárias altas vazões. Quando se fala de taxas de compressão muito altas, ou aplicações em baixas capacidades, os compressores alternativos até hoje ainda são dominantes. Para refrigeração de geladeiras, por exemplo, ainda são amplamente utilizados pelo seu baixo custo e alta eficiência.

Dessa forma, muitos estudos ainda são realizados no âmbito de se entender as vibrações e ruído produzidos em tais compressores, assim como para aumentar sua eficiência energética e vida útil, e em outros aspectos, como por exemplo relacionados à manutenção e confiabilidade desses compressores.

1.2. Compressores

Silva (1977) define compressores como máquinas com a finalidade de comprimir

gases para diversas aplicações, como: pintura, ferramentas pneumáticas, limpeza de peças, compressão de gás de cozinha, entre outros. No trabalho, ele cita que a diferença básica entre os compressores e os ventiladores se dá pela elevação de pressão geralmente maior e vazão geralmente menor de compressores. Em casos limítrofes, é difícil se determinar se uma máquina é um compressor ou um ventilador.

Chlumský (1965) caracteriza um compressor de maneira similar, como sendo uma máquina para compressão repetida de gases, ressaltando também que ventiladores são máquinas que elevam a pressão do gás somente a ponto de ultrapassar a resistência que surge no fluxo do gás.

Os dois tipos de compressores que existem são: compressores dinâmicos e de deslocamento positivo. Os compressores dinâmicos são aqueles que transmitem energia cinética ao fluido convertendo-a futuramente em pressão por meio de um difusor, podendo ser axiais, onde o fluxo é perpendicular ao movimento das pás do compressor (no eixo de rotação); radiais ou centrífugos, onde o fluxo é na direção radial. Existem também os compressores dinâmicos mistos, também chamados de diagonais, que estão entre os compressores radiais e axiais.

Já os compressores de deslocamento positivo ou estáticos, são aqueles que comprimem o gás pela redução do seu volume. Estes podem ser rotativos, como os de parafuso, de lóbulos, de cilinbro conchoidal, de engrenagens, entre outros e alternativos que serão estudados mais amplamente neste trabalho.

O funcionamento de um compressor alternativo se dá pela diminuição do volume em uma câmara de compressão por um pistão, que é acionado por uma biela, conectada em uma manivela. O gás é comprimido pelo pistão até atingir a pressão de descarga, determinada pela válvula de escape. Desse ponto em diante a válvula de escape se abre e o gás de dentro da câmara é expelido para um reservatório de alta pressão, onde é armazenado para uso posterior. Quando o pistão atinge o fim de curso e começa o movimento de retrocesso, a pressão do gás remanescente na câmara de compressão diminui, até alcançar a pressão de sucção, determinada pela válvula de admissão. A válvula de admissão se abre, e o gás é admitido para dentro da câmara de compressão. A Figura 1 mostra os diversos elementos de um compressor alternativo.

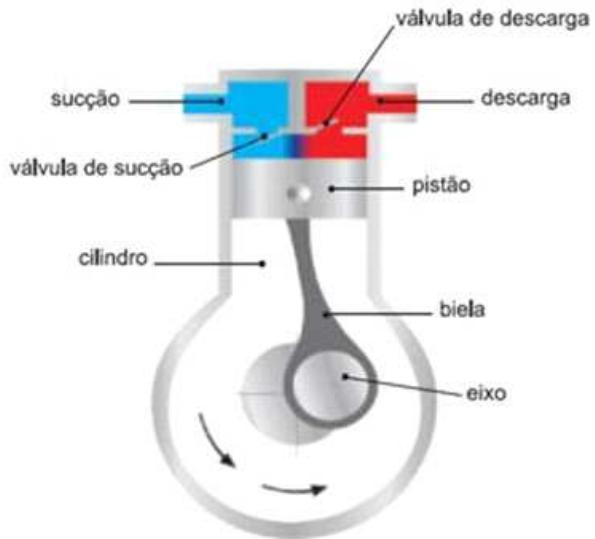


Figura 1: Diagrama dos principais componentes de um compressor alternativo

Fonte:http://blogdoprofessorcarlao.blogspot.com/2009/05/funcionamento-do-compressor-alternativo_10.html

Feller (1944) classifica os diversos tipos de compressores alternativos de acordo com o acionamento e da conexão com a unidade motora. Alguns desses tipos de compressores são: de acordo com o acionamento: compressor acionado por motor elétrico, por vapor ou por motor de combustão interna, e; de acordo com a conexão com a unidade motor: diretamente conectado, diretamente conectado com acoplamento flexível, por par redutor de engrenagens, por correia, e *en bloc*.

Os compressores alternativos podem apresentar diferentes números de estágios e de cilindros. Um compressor com mais de um estágio é aquele que comprime o ar até a pressão de descarga em mais de um processo de aumento de pressão, mas não necessariamente em mais de um cilindro, como pode ser observado na Figura 2.

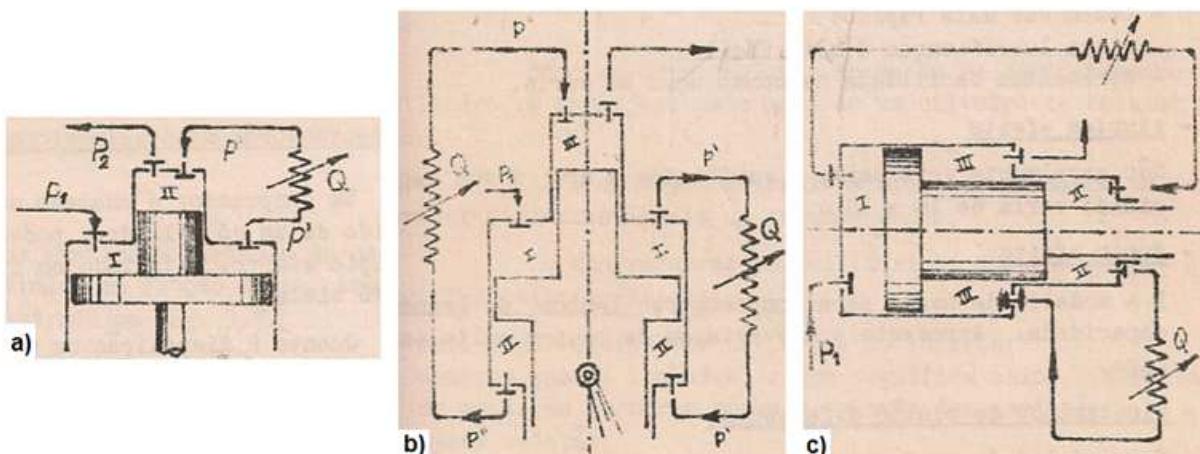


Figura 2: Compressores multiestagiados: a) Compressor de dois estágios; b) Compressor de três estágios vertical; c) Compressor de três estágios horizontal

Fonte: Silva (1977)

Já os compressores policilíndricos possuem mais de um cilindro. Aumentar o número de cilindros ao invés de aumentar um cilindro e seu dimensionamento pode ser explicado pelo fato que existe um tamanho ótimo de cilindro em relação ao peso (peso mínimo), e assim é possível uma redução de massa, e melhores distribuições do torque no tempo já que enquanto um dos cilindros opera na fase de descarga ou compressão, o outro opera na sucção ou expansão (SILVA, 1977). Alguns tipos diferentes de compressores policilíndricos podem ser vistos na Figura 3.

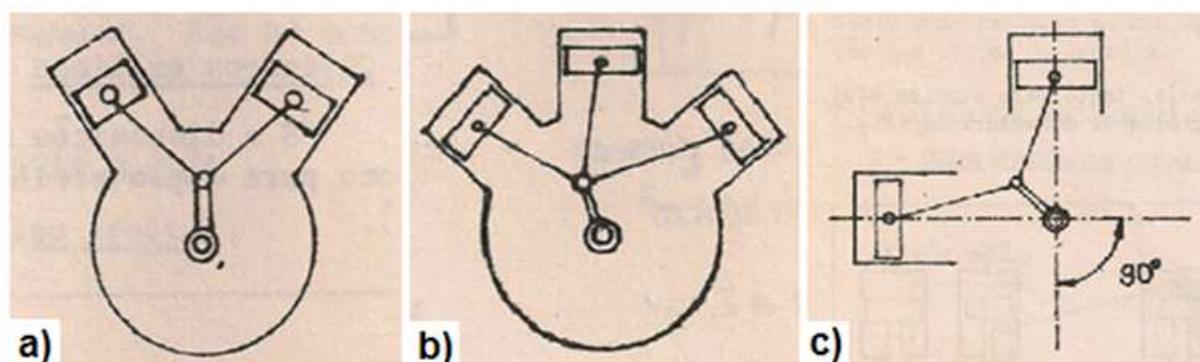


Figura 3: Compressores Policilíndricos: a) Cilindros em V; b) Cilindros em duplo V; c) Cilindros em ângulo reto

Fonte: Silva (1977)

Construtivamente, os compressores alternativos podem ser abertos, semi-herméticos ou herméticos (BASSETTO, 1997). Enquanto que nos compressores alternativos abertos o motor é exterior à carcaça, necessitando de selo para vedação, nos herméticos e semi herméticos a carcaça contém o motor, sendo nos semi-herméticos

possível a remoção do cabeçote para acesso às válvulas e pistões.

1.3. Justificativa

Como já citado, muitos estudos têm sido realizados no âmbito de: aumentar a eficiência térmica e mecânica de compressores alternativos, aumentar a vida útil e diminuir ruído e vibrações. Serrano (2002), por exemplo, faz menção aos trabalhos desenvolvidos para a melhoria termodinâmica do processo nos compressores, assim como desenvolve seu trabalho a cerca de parâmetros termodinâmicos, como transferência de calor do sistema, distribuição de temperaturas, diagramas de pV na câmara de compressão, entre outros.

Um dos pontos principais que têm sido analisados são as juntas presentes em um sistema pistão-biela-manivela dentro de um compressor (assim como em outras máquinas que utilizem tal sistema, como motores de combustão interna, porém com enfoques diferentes, não priorizando tanto o ruído, por exemplo). Um dos parâmetros importantes nas juntas do sistema é relação entre a espessura do filme de óleo e a rugosidade do material, que pode determinar o regime de lubrificação, como sendo marginal, misto ou hidrodinâmico (DURVAL, 2005). Tal parâmetro tem influência direta sobre o atrito em tal junta e a vida útil do sistema.

Gerardin (2005) desenvolve um trabalho de mancal hidrodinâmico em um motor de combustão interna (também dotado do sistema pistão-biela-manivela), para se chegar às distribuições de pressão e de força no mancal e folgas, de acordo com a pressão de combustão. Em sua análise ele utiliza a equação de Reynolds e o método de elementos finitos para o modelo do mancal hidrodinâmico, comprovando a eficiência e precisão do método nos resultados, e sugerindo, para um trabalho futuro, a utilização de um sistema com integração pelo método de Runge Kutta para a resolução com o sistema dinâmico.

Já Izuka (2007) desenvolve um trabalho especificamente para compressores herméticos, onde utiliza para o modelo matemático dos mancais hidrodinâmicos três metodologias diferentes: métodos dos elementos finitos, método das diferenças finitas e método dos volumes finitos, comparando as três metodologias para os casos analíticos de mancais curtos e mancais longos e posteriormente realiza uma simulação para mancais finitos. Ele também se preocupa com a dinâmica do sistema pistão-biela-manivela,

utilizando o método de Newton Euler para a integração temporal. Os resultados obtidos são bem próximos aos resultados analíticos, e a sugestão para trabalhos futuros é a comparação com softwares comerciais, assim como a inclusão da cavitação no mancal e elasticidade no alojamento.

Couto (2006) também estudou a lubrificação de compressores alternativos, criando uma bancada experimental para a comparação com resultados teóricos fornecidos pelo método de elementos finitos, considerando também efeitos elásticos. Os resultados, porém, não foram possíveis de serem replicados no trabalho de Izuka (2007).

Estupiñan e Santos (2007) criam um modelo de compressor alternativo com pistão considerado como partícula, biela e manivela como corpos rígidos e eixo do mancal flexível, com mancal hidrodinâmico curto, utilizando o método de elementos finitos para os elementos flexíveis e sistemas de dinâmica de multicorpos para os corpos rígidos. Eles mostraram que embora o desbalanceamento do sistema afete a dinâmica da órbita do eixo no mancal hidrodinâmico, não afeta significativamente as forças e espessura do filme de óleo.

Outra parte muito estudada no sistema pistão-biela-manivela, mas que não será abordada nesse trabalho, podendo ser adicionada para um sistema mais realístico no futuro, é o ângulo que o eixo do pistão forma com o eixo do cilindro, também chamada de movimento secundário do pistão, que, embora pequeno, interfere em muito no atrito entre cilindro e pistão e nas interações hidrodinâmicas entre eles. Prata, Fernandes e Fagotti (2001) chegam a conclusões sobre melhores valores de escolha para posicionamento do pino do pistão, assim como viscosidade do fluido lubrificante e folga radial entre saia do pistão e cilindro.

Percebe-se portanto um esforço no sentido de melhor entender os efeitos nos mancais dos compressores alternativos. Porém, até não se deu muita atenção ainda às juntas da biela com a manivela e da biela com o pistão, e seus efeitos para a vibração e sobre o atrito do sistema. Este trabalho possui a finalidade portanto de estudar melhor o efeito em tais juntas, considerando somente a teoria de mancais hidrodinâmicos curtos, e descobrir quais forças, excentricidades e órbitas nessas juntas, além do mancal principal, também já estudado por outros autores.

2. Revisão Bibliográfica

2.1. Vínculos, graus de liberdade e coordenadas generalizadas

Para descrever no espaço com relação a um referencial a posição de uma partícula que está completamente livre de quaisquer restrições no seu movimento, é necessário se utilizar um sistema de 3 coordenadas, onde uma delas necessariamente deverá ter a dimensão de comprimento (existindo a possibilidade das outras duas coordenadas possuirem ou não dimensão de comprimento). Nota-se que, nesse caso, pode-se variar qualquer coordenada desse sistema de coordenadas da partícula sem alterar as outras. Exemplos de sistemas de coordenadas muito utilizados são: cartesianas, esféricas e cilíndricas:

$$\vec{r}_i = f(x_i, y_i, z_i) = f(r_i, \theta_i, \phi_i) = f(r_i, h_i, \phi_i)$$

De uma forma geral serão chamadas de $x_{i,1}$, $x_{i,2}$ e $x_{i,3}$ as coordenadas da partícula i:

$$\vec{r}_i = f(x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$$

Se o sistema a ser analisado possuir um determinado número N de partículas, livres de quaisquer restrições, será necessário um número três vezes maior de coordenadas para descrever completamente tal sistema:

$$\vec{r}_1 = f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3})$$

$$\vec{r}_2 = f(x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3})$$

$$\vec{r}_3 = f(x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3})$$

$$\vec{r}_4 = f(x_{4,1}, x_{4,2}, x_{4,3})$$

.

.

$$\vec{r}_N = f(x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3})$$

Se for considerado o caso bidimensional será necessário um sistema de apenas duas coordenadas para descrever a posição da partícula. Portanto um sistema com N partículas completamente sem restrições será descrito por um número duas vezes maior de coordenadas:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= f(x_{1,1}, x_{1,2}) \\
\vec{r}_2 &= f(x_{2,1}, x_{2,2}) \\
\vec{r}_3 &= f(x_{3,1}, x_{3,2}) \\
\vec{r}_4 &= f(x_{4,1}, x_{4,2}) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\vec{r}_N &= f(x_{N,1}, x_{N,2})
\end{aligned}$$

Por outro lado, percebe-se que em muitas situações, as partículas possuem restrições aos seus movimentos, restrições essas chamadas de vínculos. Vínculos são, como Lemos (2007) descreveria:

“Vínculos são limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo a priori o seu movimento”.

Quando se introduzem vínculos ao sistema, percebe-se que não mais é possível alterar todas as coordenadas de maneira independente. Assim os vínculos introduzem relações entre as coordenadas. Se um vínculo é dito holônomo, tal relação será dada por:

$$f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) = 0$$

Dessa forma, se o sistema possuir S vínculos holônomos, pode-se perceber que esse sistema apresenta $L = 3N - S$ grupos de coordenadas independentes entre si, chamados graus de liberdade. Como exemplo, considere um sistema onde uma partícula pode percorrer livremente a borda de um cilindro como mostrado na figura 4:

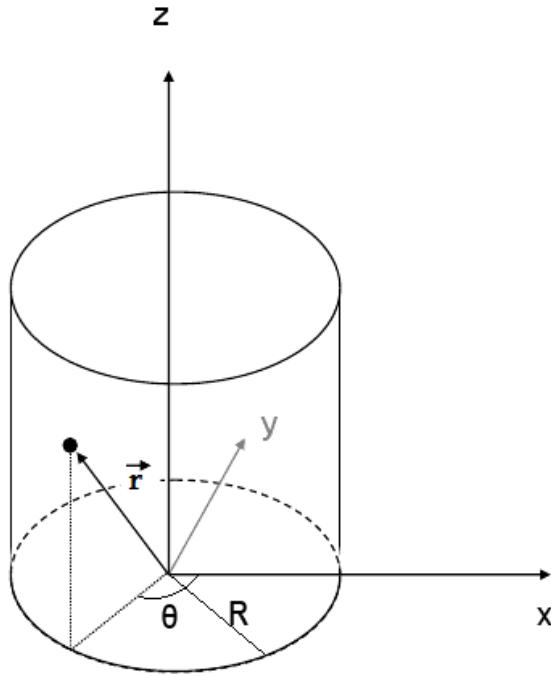


Figura 4: Partícula livre para percorrer a borda de um cilindro

O sistema possui um único vínculo: $x^2 + y^2 = R^2$. Assim, N para esse sistema é 1 (por só existir uma partícula) e S é 1 (um único vínculo), portanto L será $L = 3N - S = 2$. Percebe-se que nesse sistema, as coordenadas cartesianas x e y do sistema são dependentes entre si, e a coordenada z independente. Pode-se dizer então que o grupo de coordenadas composto por x e y é independente do grupo de coordenadas composto por z.

Cada grupo de coordenadas independente pode ser assim substituído por uma única coordenada que descreve completamente tal grupo, e assim obtém-se o número mínimo de coordenadas que descrevem completamente o sistema. No exemplo acima, as coordenadas x e y poderiam ser substituídas por θ , e assim o sistema poderia ser completamente descrito por apenas θ e z.

Tais coordenadas independentes são as coordenadas generalizadas de um sistema e são em quantidade iguais aos graus de liberdade do sistema. Serão aqui designadas pela letra q .

2.2. Graus de liberdade de um corpo rígido

Um corpo rígido é definido como um corpo constituído de um número finito de partículas, no qual a distância entre duas quaisquer não se alterará. Dessa forma, pode-se dizer que entre duas partículas quaisquer do corpo rígido, existe um vínculo, que pode ser imaginado como uma haste fixa. Esses vínculos são os vínculos internos a um corpo rígido.

Assim, se um corpo rígido possuir N partículas, poderia ser descrito por $3N$ coordenadas dependentes. Porém, escolhendo-se três partículas quaisquer do corpo, percebe-se que a primeira dessas possui $N-1$ relações de vínculo com todas as outras $N-1$ partículas. A segunda partícula terá $N-2$ relações de vínculo com as outras $N-2$ partículas que sobraram, e, da mesma maneira, a terceira partícula possuirá $N-3$ relações de vínculo com as partículas que sobrarem.

Em outras palavras, ao se observar a primeira partícula, ela pode fazer um percurso qualquer no espaço. Já a segunda, por estar restringida a essa, pode se mover em uma calota esférica ao redor da primeira. Já a terceira poderá percorrer a intersecção entre uma calota esférica ao redor da primeira e outra calota esférica ao redor da segunda, ou seja, uma circunferência.

Já a quarta partícula, teoricamente poderia percorrer a intersecção de três calotas esféricas, ao redor das partículas anteriores. Isso implicaria dizer que tal partícula poderia ocupar dois pontos no espaço. Porém, tal proposição é logicamente falsa, pois para ir de um ponto para o outro, a partícula precisaria percorrer todos os pontos entre eles. Assim, dada a configuração inicial do corpo, a quarta partícula e as restantes, só podem ocupar um ponto.

Portanto, um corpo rígido, sem a ação de vínculos externos, é descrito por $3N$ coordenadas dependentes e $(N-1)+(N-2)+(N-3)=3N-6$ relações entre tais coordenadas (ou vínculos internos do corpo rígido). Assim sendo, tal corpo rígido possuirá $3N-(3N-6)=6$ graus de liberdade e também 6 coordenadas independentes.

Tais graus de liberdade do corpo podem ser também traduzidas em:

- Translação em 3 direções linearmente independentes, e ;
- Rotação em torno de 3 eixos linearmente independentes.

Da mesma maneira, para o caso bidimensional escolhem-se duas partículas, a primeira com $N-1$ relações independentes de vínculo com o resto do sistema e a segunda com $N-2$ relações. Assim sendo, quaisquer outras poderão ser expressas em termos dessas duas. Portanto o sistema terá $2N-(N-1)-(N-2)=3$ graus de liberdade e coordenadas independentes, quando não houverem vínculos externos.

Os graus de liberdade do corpo no caso bidimensional são:

- Translação nas 2 direções linearmente independentes que definem o plano, e ;
- Rotação em torno do eixo normal ao plano considerado.

No sistema pistão-biela-manivela existem três corpos rígidos, e portanto, se não houvessem vínculos entre tais corpos e entre esse sistema e os arredores, haveriam 9 graus de liberdade (caso bidimensional). Porém, existem no sistema 8 vínculos. Desses, 4 são entre os corpos rígidos:

- 2 vínculos no ponto de contato entre biela e manivela, impondo que esse ponto deverá

sempre ser coincidente para os dois corpos (ou seja, restringindo translação nas duas direções possíveis);

- 2 vínculos no ponto de contato entre biela e pistão (novamente restringindo translação nas duas direções possíveis).

Repare que seriam três os vínculos entre os corpos rígidos quando fosse analisado o caso tridimensional. E existem também 4 vínculos dados pelos dois apoios do sistema com os arredores:

- 2 vínculos no centro de rotação da manivela (restringindo todo o movimento desse ponto, e assim qualquer outro ponto estará sempre à mesma distância de tal apoio), e;
- 2 vínculos em dois pontos diferentes no pistão, restringindo em ambos o movimento em uma direção e deixando a direção normal à essa (e pertencente ao plano de análise) livre.

Dessa maneira o sistema só possui um único grau de liberdade, e será completamente definido por uma única coordenada, podendo todas as outras coordenadas ficarem em função desta. Mais adiante, na modelagem do sistema serão mostradas as relações entre as coordenadas dependentes do sistema.

2.3. Trabalhos Virtuais

O trabalho que uma força genérica \vec{F}_i realizada em uma partícula i é dado por:

$$W_i = \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i ,$$

onde $d\vec{r}_i$ é a variação infinitesimal do vetor posição da partícula \vec{r}_i . Como \vec{F}_i é uma força qualquer atuante na partícula, fica evidente que pode ser também a resultante das forças na partícula (pode se demonstrar fazendo a soma dos trabalhos realizados pelas diferentes forças atuantes na partícula).

Como o trabalho realizado por uma força é o produto escalar entre ela e o deslocamento da partícula, percebe-se que quando estes forem perpendiculares o trabalho será nulo. Esse é um caso de particular interesse para as forças vinculares, pois possuem direção sempre perpendicular ao deslocamento da partícula em que atuam, quando forem consideradas variações instantâneas.

Desse modo, convém definir um deslocamento instantâneo, para que todas as forças vinculares sejam perpendiculares a tais deslocamentos, e assim os trabalhos provenientes destas forças, nulos.

Introduz-se então o conceito de deslocamento virtual, ou seja, deslocamentos considerando que o tempo não varia. Se for utilizada a expressão anterior com variação infinitesimal virtual da

posição da partícula ($\delta \vec{r}_i$), e forem separadas as forças em forças vinculares ($\vec{F}_{i,vinc}$) e não vinculares ($\vec{F}_{i,nvinc}$), obtém-se:

$$\delta W_{i,v} = \vec{F}_{i,nvinc} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{F}_{i,vinc} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_{i,nvinc} \cdot \delta \vec{r}_i ,$$

pois o termo $\vec{F}_{i,vinc} \cdot \delta \vec{r}_i$ é igual a 0. Percebe-se portanto que o trabalho virtual de uma partícula depende somente das forças não vinculares e do deslocamento virtual desta.

Assim o trabalho de um sistema em um deslocamento virtual infinitesimal será:

$$\delta W_v = \sum_i^N \delta W_{i,v} = \sum_i^N \vec{F}_{i,nvinc} \cdot \delta \vec{r}_i .$$

2.4. Algumas relações importantes

Antes de se começar a dedução das equações de Lagrange vale a pena demonstrar algumas relações que serão futuramente utilizadas.

Como já foi dito, o sistema pode ser completamente descrito pelas S coordenadas generalizadas. Dessa forma, uma coordenada j qualquer de uma partícula i qualquer desse sistema, poderá ser descrita por uma função das coordenadas generalizadas:

$$x_{i,j} = f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t) .$$

Assim como a posição total da partícula i:

$$\vec{r}_i = f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t) .$$

Assim, variações infinitesimais de $x_{i,j}$ e de \vec{r}_i podem ser descritas pela diferenciação das expressões anteriores:

$$\begin{aligned} \delta x_{i,j} &= \sum_k^s \frac{\partial x_{i,j}}{\partial q_k} \cdot \delta q_k + \frac{d x_{i,j}}{dt} \cdot \delta t ; \\ \delta \vec{r}_i &= \sum_k^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k + \frac{d \vec{r}_i}{dt} \cdot \delta t . \end{aligned}$$

Se houver um deslocamento virtual, a variação infinitesimal da posição da partícula i não dependerá do tempo, como já antes visto, portanto:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_k^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k .$$

E se tal expressão for derivada no tempo, como a variação da posição da partícula em função da variação da coordenada generalizada não depende do tempo, será obtido:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_k^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k .$$

Se essa ultima expressão for derivada com relação a uma velocidade generalizada \dot{q}_h qualquer, como $\delta \dot{q}_k$ só depende de \dot{q}_h quando $k=h$, e $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ não depende de \dot{q}_h (nem quando $k=h$), obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \left(\sum_k^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \right)}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot \delta \dot{q}_1 \right)}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \cdot \delta \dot{q}_2 \right)}{\partial \dot{q}_h} + \dots + \frac{\partial \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} \cdot \delta \dot{q}_h \right)}{\partial \dot{q}_h} + \dots + \frac{\partial \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \cdot \delta \dot{q}_s \right)}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} .$$

Vale relembrar que essa expressão só é válida para deslocamentos virtuais, e que h é uma coordenada generalizada qualquer, e portanto poderia igualmente se dizer que $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

E, por último, se o termo $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ for descrito como:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_l^S \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \cdot \partial q_k} \cdot \delta q_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \cdot \partial t} \cdot \delta t .$$

Ao se derivar no tempo, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_l^S \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \cdot \partial q_k} \cdot \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \cdot \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_l^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} .$$

Resumindo, para deslocamentos virtuais valem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_i &= \sum_k^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k , \text{ e;} \\ \delta \dot{\vec{r}}_i &= \sum_k^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta \dot{q}_k ; \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} , \text{ e;} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} . \end{aligned}$$

2.5. Equações de Lagrange

Como o que se pretende demonstrar é que o movimento de um corpo está relacionado à sua energia e às forças nele atuante, começa-se a dedução pela segunda lei de Newton, que relaciona a resultante de uma partícula com a aceleração dela, da seguinte forma:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{r}_i .$$

O princípio de D'Alembert diz que se o termo $m_i \cdot \vec{r}_i$ for considerado como uma força inercial, tal termo poderá ser jogado para o outro lado da equação e assim a somatória das forças será nula. Desta forma, obtém-se:

$$\sum_i^N (\vec{F} - \vec{m}_i \cdot \vec{r}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 .$$

O termo $\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ pode ser então substituído utilizando resultando em:

$$\begin{aligned} \sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i^N (\vec{F}_{i,nvinc} + \vec{F}_{i,vinc}) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i^N \vec{F}_{i,nvinc} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i^N \vec{F}_{i,nvinc} \cdot \sum_k^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k = \\ &= \sum_i^N \sum_k^S \vec{F}_{i,nvinc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k . \end{aligned}$$

Como já visto, o vetor de posição da partícula i poder ser descrito por coordenadas cartesianas, da forma $\vec{r}_i = r_{i,x} \hat{i} + r_{i,y} \hat{j} + r_{i,z} \hat{k}$, e logicamente o vetor velocidade da partícula i poderá ser escrito por $\vec{r}_i = \dot{r}_{i,x} \hat{i} + \dot{r}_{i,y} \hat{j} + \dot{r}_{i,z} \hat{k}$. Assim, o termo $m \cdot \vec{r}_i$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{r}_i &= \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{r}_i) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{r}_{i,x}} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{r}_{i,x}^2 \right) \cdot \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \dot{r}_{i,y}} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{r}_{i,y}^2 \right) \cdot \hat{j} + \frac{\partial}{\partial \dot{r}_{i,z}} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{r}_{i,z}^2 \right) \cdot \hat{k} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \cdot \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \cdot \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \cdot \hat{k} \right) . \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_i^N m \cdot \vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \cdot \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \cdot \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \cdot \hat{k} \right) \cdot \sum_k^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k = \\ &= \sum_i^N \sum_k^S \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \cdot \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \cdot \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \cdot \hat{k} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k . \end{aligned}$$

O termo $\sum_k^S \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \cdot \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \cdot \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \cdot \hat{k} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ pode ser escrito como:

$$\sum_k^S \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \hat{k} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] - \sum_k^S \left[\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \hat{k} \right] \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) .$$

Logo, utilizando duas das relações antes deduzidas:

$$\sum_k^S \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \hat{k} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] - \sum_k^S \left[\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \hat{k} \right] \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} .$$

Com $\vec{r}_i = \dot{r}_{i,x} \hat{i} + \dot{r}_{i,y} \hat{j} + \dot{r}_{i,z} \hat{k}$ o termo $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ fica $\frac{\partial \dot{r}_{i,x}}{\partial q_k} \hat{i} + \frac{\partial \dot{r}_{i,y}}{\partial q_k} \hat{j} + \frac{\partial \dot{r}_{i,z}}{\partial q_k} \hat{k}$. Assim, o termo $\left(\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \hat{k} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ fica:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial \dot{r}_{i,x}}{\partial q_k} \hat{i} + \frac{\partial \dot{r}_{i,y}}{\partial q_k} \hat{j} + \frac{\partial \dot{r}_{i,z}}{\partial q_k} \hat{k} \right) = \\ & = \frac{\partial E_x}{\partial \dot{r}_{i,x}} \cdot \frac{\partial \dot{r}_{i,x}}{\partial q_k} + \frac{\partial E_y}{\partial \dot{r}_{i,y}} \cdot \frac{\partial \dot{r}_{i,y}}{\partial q_k} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{r}_{i,z}} \cdot \frac{\partial \dot{r}_{i,z}}{\partial q_k} = \frac{\partial E_x}{\partial q_k} + \frac{\partial E_y}{\partial q_k} + \frac{\partial E_z}{\partial q_k} = \frac{\partial E}{\partial q_k} . \end{aligned}$$

Portanto:

$$\sum_i^N \sum_k^S \left(\vec{F}_{i,nvinc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial E}{\partial q_k} \right) \cdot \delta q_k = 0 .$$

No entanto, os deslocamentos virtuais das coordenadas generalizadas não são dependentes entre si, como já antes visto. Portanto, a única maneira de se anular a expressão acima, será tendo cada coeficiente de cada deslocamento virtual igual a 0 (Martins, 2006), então:

$$\sum_i^N \left(\vec{F}_{i,nvinc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial E}{\partial q_k} \right) = 0 .$$

Na fórmula deduzida possuem-se termos em função da energia cinética, mas não em função da energia potencial. Porém realizando mais algumas transformações poderá se obter uma fórmula mais geral em função da Lagrangiana do sistema, que é a diferença entre a energia cinética e potencial.

As forças não vinculares da fórmula anterior podem ser divididas em forças derivadas de um potencial, e forças não conservativas, da seguinte forma:

$$\vec{F}_{i,nvinc} = \vec{F}_{nc,i} - \left(\frac{\partial V_i}{\partial r_{i,x}} \hat{i} + \frac{\partial V_i}{\partial r_{i,y}} \hat{j} + \frac{\partial V_i}{\partial r_{i,z}} \hat{k} \right) ,$$

onde $\vec{F}_{nc,i}$ é a resultante das forças não conservativas não vinculares atuantes na partícula i, e V_i o potencial das forças conservativas atuantes em i. Substituindo na fórmula deduzida, obtém-se:

$$\sum_i^N \left(\vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial E}{\partial q_k} \right) = 0 .$$

Como $\vec{r}_i = r_{i,x} \hat{i} + r_{i,y} \hat{j} + r_{i,z} \hat{k}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial r_{i,x}} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial r_{i,y}} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial r_{i,z}} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial r_{i,x}}{\partial q_k} \hat{i} + \frac{\partial r_{i,y}}{\partial q_k} \hat{j} + \frac{\partial r_{i,z}}{\partial q_k} \hat{k} \right) &= \frac{\partial V}{\partial r_{i,x}} \cdot \frac{\partial r_{i,x}}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial r_{i,y}} \cdot \frac{\partial r_{i,y}}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial r_{i,z}} \cdot \frac{\partial r_{i,z}}{\partial q_k} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial q_k} , \end{aligned}$$

portanto:

$$\sum_i^N \left(\vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial (E-V)}{\partial q_k} \right) = 0 .$$

$$\text{Mas, como } \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 , \quad \sum_i^N \left(\vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (E-V)}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial (E-V)}{\partial q_k} \right) = 0 .$$

E, finalmente, chamando de L a lagrangiana do sistema, onde $L = E - V$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} .$$

2.6. Energia cinética

Três propriedades, que serão antes abordadas pela sua importância na determinação da energia cinética de um corpo rígido, são: a relação entre as velocidades de quaisquer dois pontos do corpo rígido, a posição do centro de massa do corpo e a matriz de inércia do corpo.

2.6.1. Relação entre velocidades de um corpo rígido

Como já visto, a definição de corpo rígido impõe que dois pontos quaisquer do corpo estejam sempre à mesma distância e assim o corpo como um todo pode possuir rotação em até três eixos linearmente independentes. Para tal vetor de rotação será aqui utilizado $\vec{w} = w_x \hat{i} + w_y \hat{j} + w_z \hat{k}$.

Considere um referencial fixo no espaço (ao qual serão refenciadas posições absolutas) e

outro fixo a um ponto (C) qualquer deste corpo (tal referencial caminha junto com C, porém não roda solidário ao corpo). Todo o resto do corpo irá possuir rotação $\vec{\omega}$ em torno de C quando se observar do referencial móvel. Assim, a velocidade absoluta de dois outros pontos P e O quaisquer serão:

$$\vec{V}_P = \frac{d \vec{R}_{CP}}{dt} + \vec{V}_c = \vec{\omega} \times \vec{R}_{CP} + \vec{V}_c \quad \text{e} \quad \vec{V}_O = \frac{d \vec{R}_{CO}}{dt} + \vec{V}_c = \vec{\omega} \times \vec{R}_{CO} + \vec{V}_c .$$

Assim, a velocidade relativa entre os pontos P e O será:

$$\vec{V}_P - \vec{V}_O = \vec{\omega} \times \vec{R}_{CP} - \vec{\omega} \times \vec{R}_{CO} = \vec{\omega} \times \vec{R}_{OP} .$$

Encontra-se então a velocidade absoluta P em função da velocidade absoluta O:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{R}_{OP} .$$

2.6.2. Posição de centro de massa de um corpo rígido

O vetor posição do centro de massa de um corpo rígido é definido como:

$$\vec{R}_{GO} = \frac{\sum_i^n m_i \cdot \vec{R}_{iO}}{\sum_i^n m_i} = \frac{\sum_i^n m_i \cdot \vec{R}_{iO}}{M} ,$$

onde m_i é a massa de uma partícula do corpo rígido de n partículas, R_{iO} sua distância ao ponto de referência e M a massa total do sistema. A importância do centro de massa é descrever a aceleração do corpo devido às forças externas nele aplicadas nas suas respectivas direções. Porém, o centro de massa não tem a capacidade de descrever a aceleração rotacional devido às distâncias normais entre o centro de massa e as forças no sistema aplicadas.

Para isso, introduzem-se as matrizes de inércia.

2.6.3. Matriz de inércia de um corpo rígido

A matriz de inércia de um corpo rígido é definida como (onde m_i continua sendo a massa de uma partícula do corpo, e x_i' , y_i' e z_i' são as coordenadas cartesianas da partícula em relação ao referencial adotado):

$$[J] = \sum_i^n \begin{pmatrix} m_i & \begin{bmatrix} z_i'^2 + y_i'^2 & -x_i' \cdot y_i' & -x_i' \cdot z_i' \\ -x_i' \cdot y_i' & x_i'^2 + z_i'^2 & -y_i' \cdot z_i' \\ -x_i' \cdot z_i' & -y_i' \cdot z_i' & x_i'^2 + y_i'^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} .$$

As matrizes de inércia possuem a capacidade somente de descrever a aceleração rotacional do corpo devido às distâncias normais entre o centro de massa e as forças no sistema aplicadas.

Com tais propriedades, será agora encontrada a energia cinética do sistema com relação a um referencial fixo. A energia cinética de uma partícula do corpo com relação ao referencial fixo é dada por:

$$T_i = \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} .$$

Utilizando um referencial móvel, fixo ao corpo em um ponto qualquer O', pode-se descrever a velocidade de i como sendo:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{O'} + \vec{w} \times \vec{R}_{iO'} ,$$

onde $\vec{V}_{O'}$ é a velocidade do ponto O' e $\vec{R}_{iO'}$ o vetor posição do ponto O' à partícula. Assim, a energia cinética da partícula será:

$$T_i = \frac{m_i \cdot (\vec{V}_{O'} + \vec{w} \times \vec{R}_{iO'})^2}{2} .$$

Como a energia cinética total do corpo é a somatória da energia cinética das partículas, segue:

$$T = \frac{\sum_i^n m_i \cdot (\vec{V}_{O'} + \vec{w} \times \vec{R}_{iO'})^2}{2} = \frac{V_{O'}^2 \cdot \sum_i^n m_i + 2 \cdot \vec{V}_{O'} \cdot \vec{w} \times \sum_i^n m_i \cdot \vec{R}_{iO'} + \sum_i^n m_i \cdot (\vec{w} \times \vec{R}_{iO'})^2}{2} .$$

O termo $\sum_i^n m_i \cdot \vec{R}_{iO'}$ pode ser reescrito como $M \cdot \vec{R}_{GO'}$, e se $\sum_i^n m_i \cdot (\vec{w} \times \vec{R}_{iO'})^2$ for desenvolvido com coordenadas cartesianas em $\vec{R}_{iO'}$ e vetor $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$, resultará em (PESCE, 2004):

$$\sum_i^n m_i \cdot [w_x^2 \cdot (y'^2 + z'^2) + w_y^2 \cdot (x'^2 + z'^2) + w_z^2 \cdot (x'^2 + y'^2) - 2 \cdot w_x \cdot w_y \cdot x' \cdot y' - 2 \cdot w_x \cdot w_z \cdot x' \cdot z' - 2 \cdot w_y \cdot w_z \cdot y' \cdot z'] ,$$

que também pode ser escrito da forma matricial:

$$(w_x \ w_y \ w_z) \cdot \begin{bmatrix} \sum_i^n m_i \cdot (z_i'^2 + y_i'^2) & \sum_i^n m_i \cdot (-x_i' \cdot y_i') & \sum_i^n m_i \cdot (-x_i' \cdot z_i') \\ \sum_i^n m_i \cdot (-x_i' \cdot y_i') & \sum_i^n m_i \cdot (x_i'^2 + z_i'^2) & \sum_i^n m_i \cdot (-y_i' \cdot z_i') \\ \sum_i^n m_i \cdot (-x_i' \cdot z_i') & \sum_i^n m_i \cdot (-y_i' \cdot z_i') & \sum_i^n m_i \cdot (x_i'^2 + y_i'^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \{w\} \cdot [J] \cdot \{w\}$$

E assim a energia cinética do sistema resultará em:

$$T = \frac{V_o^2 \cdot M + 2 \cdot \vec{V}_o \cdot M \cdot \vec{w} \times \vec{R}_{GO} + \{w\} \cdot [J] \cdot \{w\}}{2}$$

Como no sistema a ser analizado só se possuem duas dimensões (x e y), e considerando $\vec{w} = w_z \cdot \vec{k} = w \cdot \vec{k}$ e nomeando $J = \sum_i^n m_i \cdot (x'^2 + y'^2)$, o termo $\sum_i^n m_i \cdot (\vec{w} \times \vec{R}_i')^2$ resulta em:

$$\sum_i^n m_i \cdot (\vec{w} \times \vec{R}_i')^2 = \sum_i^n m_i \cdot (w^2 \cdot (x'^2 + y'^2)) = J \cdot w^2$$

E a energia cinética em duas dimensões fica:

$$T = \frac{V_o^2 \cdot M + 2 \cdot \vec{V}_o \cdot M \cdot \vec{w} \times \vec{R}_{GO} + J \cdot w^2}{2}$$

2.7. Relação p-V na câmara

Será abordada nesse trabalho, somente a parte da termodinâmica referente ao processo de expansão e compressão do ar dentro da câmara de compressão de um compressor alternativo. Dessa forma, primeiramente será explicada a equação dos gases ideais, que será inicialmente utilizada para uma modelagem mais simples, e depois, a equação para processos politrópicos, que serve para explicar casos reais. Busca-se com isso uma expressão para a pressão da câmara relacionada com o volume desta.

2.7.1. Equações de Estados dos Gases, Fator de Compressibilidade e Equação dos Gases Perfeitos

Na natureza, observa-se que as propriedades temperatura, pressão e densidade (ou volume

específico) de um gás não são independentes. Dessa forma, é de grande interesse para a engenharia relacionar tais propriedades. Uma das formas é variar as propriedades dos gases e medir cada uma delas, para depois construir uma tabela de propriedades, para cada gás. Pode-se também obter resultados aproximados para as propriedades através de fórmulas que relacionem as propriedades.

Experimentalmente, foi verificado que ao se abaixar a pressão de qualquer gás, no limite, quando a pressão teoricamente é nula, o valor de $\frac{pV}{nT}$ tende a um ponto comum (obtido por extrapolação, já que não é realmente possível chegar a um valor de pressão nula em um gás). Tal ponto é chamado de Constante Universal dos Gases, será aqui designado pela letra R e tem o valor de $R=8,314 \text{ KJ/Kmol}\cdot\text{K}$.

O fator de compressibilidade de um gás é definido como $Z=\frac{pV}{nRT}$. Observa-se que quando a pressão tende a zero, o valor de Z tende a 1. Porém, ao se aumentar a pressão, nos gases reais Z não é constante, mas sim uma expansão de infinitos termos ao redor de V ou de p, com coeficientes dependentes de T (chamados de coeficientes viriais, que corrigem o fator de compressibilidade considerando as forças de interações entre as moléculas do gás). Tais coeficientes são de difícil obtenção, provenientes da mecânica estatística (Shapiro, 2006).

Para evitar o problema da determinação dos coeficientes viriais, muitas fórmulas foram desenvolvidas por diferentes autores para explicar o comportamento de um gás que se afasta do caso ideal. São as chamadas equações de estados dos gases, e são válidas (ou melhor dizendo, são mais exatas) para determinados intervalos de propriedades do gás. Algumas das mais famosas são: equação de estados de Van der Waals, equação de Redlich-Kwon e equação de Berthelot.

Perceba porém, que se Z for considerado constante e igual a 1, obtém-se uma fórmula geral bastante simplificada para as propriedades dos gases, chamada de Equação dos Gases Perfeitos:

$$pV = nRT .$$

Pode-se expressar essa fórmula também pela massa e não pelo número de moles, adicionando o termo do peso molecular:

$$pV = \frac{mRT}{M}$$

Essa fórmula não considera a interação entre as moléculas do gás, e assim chama-se o gás de

Gás Ideal ou Gás Perfeito. Tal aproximação chega bem perto da realidade quando o gás considerado:

- Tiver pressão baixa relativa à sua pressão crítica, ou;
- Tiver temperatura alta com relação à sua temperatura crítica.

Assim, ao se reorganizar os termos da equação, podemos relacionar a pressão, o volume e a temperatura de um determinado gás da forma (já que o número de moles de um recipiente não muda e R é uma constante):

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR \quad .$$

E assim, quando for considerado um processo isotérmico:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

2.7.2. Processos Politrópicos

Como já foi explicado no item anterior, para se obter uma aproximação mais exata das propriedades do sistema, não se considerando gases ideais, seria necessário utilizar um método que recorra a uma tabela, ou equações de estados. Felizmente, no caso do gás dentro da câmara de compressão de um compressor, o processo pelo qual o gás passa é um processo especial, que permite relacionar facilmente P com V.

Será considerado que a expansão e compressão sofridas dentro da câmara de um compressor são quase estáticas, isto é cada estado pelo qual a compressão passa pode ser considerado um estado de equilíbrio. Naturalmente na realidade não é possível um processo quase estático, mas para efeitos práticos a maioria dos processos de compressão e expansão se aproximam muito de um.

Dessa forma pode se dizer que o processo é politrópico, e obedece a seguinte relação:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n = C \quad ,$$

onde n é uma constante que depende do gás e da expansão ou compressão (por exemplo: temperatura, pressão ou até o calor rejeitado no ciclo).

Fica assim claro o porquê de não se precisar recorrer a métodos mais complicados como as equações de estado, ou a uma tabela: para relacionar a pressão com o volume em uma compressão ou expansão politrópica não é necessário saber a temperatura do sistema, bastando saber a pressão e

o volume do sistema em algum ponto dessa expansão ou compressão.

Para alguns casos especiais, n possui valores previamente conhecidos (aqui só serão tratados os casos relevantes para um compressor alternativo):

- Quando se considerar o gás como perfeito em um processo isotérmico n será igual a 1. Observa-se isso também pela fórmula resultante: $p_1 V_1 = p_2 V_2$;
- Quando se considerar o gás como perfeito e sob um processo de expansão ou compressão adiabática, n será igual a k (coeficiente entre calores específicos C_p e C_v do gás).

Na prática, para poder se obter o valor de n que corresponda ao processo real, é possível medir a pressão e o volume do gás na entrada e saída e utilizar a equação de processos politrópicos para determinar n, embora o que mais se faça para a medição da energia fornecida ao gás é medir a pressão ponto a ponto conforme o deslocamento do pistão e integrar a pressão da câmara pelo seu volume.

Nesse trabalho, porém, considerar-se-ão duas situações distintas com gases perfeitos: aquela em que há troca de calor ideal do sistema com o meio ambiente, possuindo-se assim um sistema isotérmico; e aquela em que não existe troca de calor com o ambiente, caindo no caso de um processo adiabático. Deve-se deixar claro que o ciclo de um compressor alternativo é tão veloz que geralmente a troca de calor com o ambiente, por ciclo, é pequena, e assim o processo adiabático se aproxima mais da realidade. A refrigeração, por aletas, ou por camisas com fluidos refrigerantes serve apenas para aumentar a troca de calor com o ambiente para diminuir o trabalho que deve ser entregue ao fluido, embora o processo continue próximo do adiabático (Dossat, 2001).

2.8. **Modelo de Mancais hidrodinâmicos curtos**

Quando se tem o interesse na análise da lubrificação entre as diversas partes do sistema, é necessário se considerar o mancal do sistema, assim como as diversas juntas, não mais rígidos, e sim os efeitos das excentricidade e do filme de óleo presentes. Um diagrama simplificado de um mancal não rígido pode ser observado na Figura 5.

A lubrificação das diversas juntas e mancais do sistema abaixa significativamente o coeficiente de atrito entre as partes com movimento relativo, reduzindo assim também a geração de calor em tais partes. Além disso, existe também uma redução local de temperatura, devido ao efeito refrigerador causado pelo lubrificante no local. Outro efeito proveniente da lubrificação é o aumento da vida útil do sistema, ainda mais quando a

lubrificação é considerada mista ou hidrodinâmica, como já visto antes, já que o contato entre os diversos componentes rígidos é menor, ou inexistente.

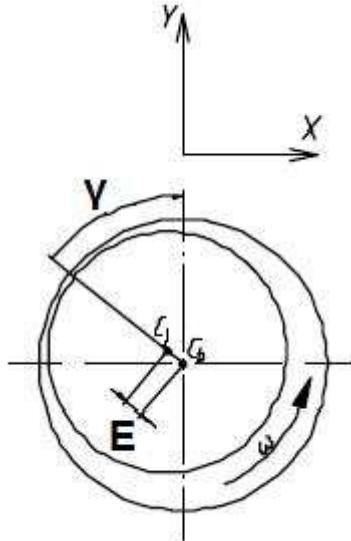


Figura 5: Esquema de um mancal não rígido

Kirk e Gunter Jr. (1970) realizam uma revisão bibliográfica em seu trabalho sobre os diversos autores que estudaram o campo de pressão em mancais hidrodinâmicos. Eles também derivam a equação de Reynolds da equação de Navier Stokes para fluidos incompressíveis e, em seguida, utilizam a hipótese de mancais curtos para a comparação com mancais finitos.

Primeiramente eles utilizam coordenadas rotativas e depois realizam uma transformação de coordenadas, para coordenadas fixas, chegando na equação:

$$\frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] = (\omega_b + \omega_j) \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} ,$$

onde θ é o ângulo medido a partir do eixo x positivo, no sentido horário, e h é a espessura do filme de óleo.

Quando considerado o modelo de mancal infinitamente longo, podem ser ignorados os efeitos de gradiente de pressão e fluxo de fluido em z , resultando em:

$$\frac{1}{6 \cdot R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = (\omega_b + \omega_j) \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} ,$$

e quando considerado o modelo de mancal curto, pode-se dizer o mesmo, mas na direção radial, resultando em:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) = (\omega_b + \omega_j) \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} .$$

Kirk e Gunter Jr. (1970) mostram também que o erro que se comete pela

aproximação de mancal curto é muito pequeno a partir de mancais com diâmetro duas vezes maior que o comprimento, e também que tal erro é maior conforme a excentricidade aumenta.

Zachariadis (1998) propõe a integração da equação para mancais hidrodinâmicos curtos, chegando assim às forças que surgem no mancal. Dessa forma, as forças que surgem no eixo x e y, respectivamente, propostas pelo modelo são:

$$F_x = \frac{-\mu \cdot R \cdot L^3}{c^2} \cdot \left[(\omega - 2 \cdot \dot{\gamma}) \cdot \left(\frac{\pi \cdot \epsilon \cdot a(\epsilon) \cdot \cos(\gamma) - 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \sin(\gamma)}{4 \cdot a(\epsilon)^4} \right) + \dot{\epsilon} \cdot \left[\frac{4 \cdot \epsilon \cdot a(\epsilon) \cdot \cos(\gamma) - \pi \cdot b(\epsilon) \cdot \sin(\gamma)}{2 \cdot a(\epsilon)^5} \right] \right] ;$$

$$F_y = \frac{-\mu \cdot R \cdot L^3}{c^2} \cdot \left[(\omega - 2 \cdot \dot{\gamma}) \cdot \left(\frac{4 \cdot \epsilon^2 \cdot \cos(\gamma) + \pi \cdot \epsilon \cdot a(\epsilon) \cdot \sin(\gamma)}{4 \cdot a(\epsilon)^4} \right) + \dot{\epsilon} \cdot \left[\frac{\pi \cdot b(\epsilon) \cdot \cos(\gamma) + 4 \cdot \epsilon \cdot a(\epsilon) \cdot \sin(\gamma)}{2 \cdot a(\epsilon)^5} \right] \right] ,$$

onde $a(\epsilon) = (1 - \epsilon^2)^{0.5}$ e $b(\epsilon) = (1 + 2 \cdot \epsilon^2)$.

Como a excentricidade que existirá entre o mancal e o eixo é da ordem de micrômetros, percebe-se que tal excentricidade pouca influencia trará sobre a posição do pistão. Porém, é fundamental poder simular tal excentricidade para saber como funciona a vibração do conjunto e assim conseguir dimensionar os componentes do pistão de forma a otimizar a dinâmica do compressor, assim como determinar o atrito existente no mancal ou junta.

A fórmula do atrito existente em um mancal hidrodinâmico proposta por , considera ambos aspectos de atrito entre as asperezas dos elementos do mancal, assim como a lubrificação hidrodinâmica do sistema:

$$T_{visc} = f_m \cdot k_n(\epsilon) \cdot C \cdot (\epsilon - \epsilon_{tr}) \cdot \Delta \cdot sgn(\omega) + \frac{L \cdot \mu \cdot R^2}{C} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{(1 - \epsilon^2)^{0.5}} \cdot \omega ,$$

onde f_m é o coeficiente de atrito entre os materiais, $k_n(\epsilon)$ é a dureza das asperidades, ϵ_{tr} é a excentricidade limite entre lubrificação mista e hidrodinâmica, e $sgn(\omega)$ é o sinal de ω .

Percebe-se que quando a lubrificação for somente hidrodinâmica e não mista, o primeiro termo da equação desaparece, resultando em:

$$T_{visc} = \frac{L \cdot \mu \cdot R^2}{C} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{(1 - \epsilon^2)^{0.5}} \cdot \omega ,$$

que é a fórmula que será usada na modelagem do sistema, por simplificação (ou seja, considera-se que a rugosidade é desprezível, embora isso não seja verdade em muitos casos), para se entender os efeitos somente da lubrificação hidrodinâmica do sistema.

3. Modelagem do Sistema

Para a modelagem do sistema, será inicialmente utilizado um sistema simplificado, no qual serão obtidas as equações diferenciais do sistema. Em seguida, e por passos, serão introduzidos novos conceitos e o sistema a princípio simplificado será trazido mais próximo a um compressor alternativo real.

3.1. Sistema 1: pistão-manivela, com torque externo linear

Nessa primeira modelagem, considera-se que no sistema somente o pistão e o volante possuem massa, e que o torque fornecido pelo motor é linearmente dependente da velocidade angular do volante (começa do máximo e chega a zero na rotação de operação ω). A figura 6 ilustra o sistema:

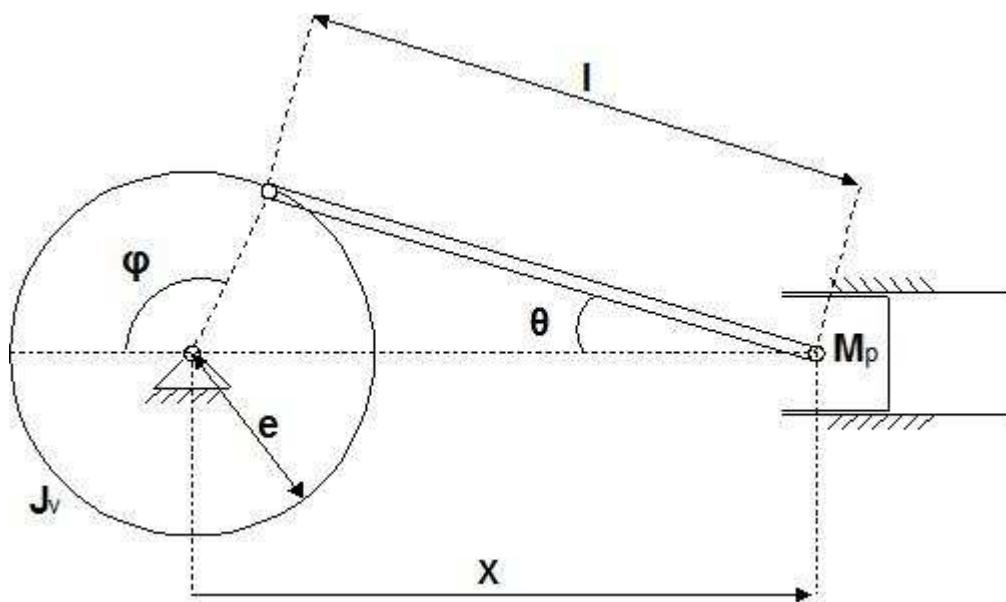


Figura 6: Sistema 1

Primeiramente acham-se as relações de vínculo entre as coordenadas θ e x em função da coordenada φ . Iniciando com θ , do sistema tem-se a relação:

$$e \cdot \sin \varphi = l \cdot \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{e}{l} \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \varphi .$$

E, portanto:

$$1 - (\sin \theta)^2 = 1 - (r \cdot \sin \varphi)^2 = (\cos \theta)^2 \rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi} ,$$

(somente é verdade porque θ nunca estará no 2º ou 3º quadrante, portanto $\cos\theta$ será sempre positivo).

Derivando obtem-se:

$$\dot{\theta} \cdot \sin \theta = \frac{r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{1}{r \cdot \sin \varphi} = \frac{r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} .$$

Derivando novamente:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varphi} \cdot \frac{r \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{-r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} - \frac{r^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} .$$

E tornando a cordenada x em função de φ :

$$x = -e \cdot \cos \varphi + l \cdot \cos \theta = -e \cdot \cos \varphi + l \cdot \sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi} .$$

Derivando no tempo:

$$\dot{x} = e \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = e \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - \frac{(l \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi)}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} .$$

Derivando novamente:

$$\ddot{x} = e \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + e \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi - l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta = \\ = \ddot{\varphi} \left(e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \text{codt} \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right) + \dot{\varphi}^2 \left(e \cdot \cos \varphi + \frac{l \cdot r^2 \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} - \frac{l \cdot r^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right) .$$

Utilizam-se agora essas relações para se achar a energia cinética do sistema em função de φ que será a coordenada generalizada das equações de Lagrange. A energia cinética no volante é:

$$T_v = \frac{J_v \cdot \dot{\varphi}^2}{2} .$$

E a energia Cinética do Pistão:

$$T_p = \frac{m_p \cdot \dot{x}^2}{2} = \frac{m_p}{2} \left(e \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right)^2 .$$

Portanto a energia cinética total do sistema é:

$$T = T_v + T_p = \frac{1}{2} \cdot \left[J_v \cdot \dot{\phi}^2 + m_p \cdot \left(e \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right)^2 \right] .$$

Utilizam-se as equações de Lagrange para se obterem as equações diferenciais do sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} .$$

Sabendo que a Lagrangiana do sistema é a diferença entre a energia cinética e potencial do sistema:

$$L = T - U , \text{ mas como } U = 0 :$$

$$L = T = \frac{1}{2} \cdot \left[J_v \cdot \dot{\phi}^2 + m_p \cdot \left(e \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right)^2 \right] .$$

Como a única coordenada generalizada, que descreve todo o sistema é φ , tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} .$$

Conhecem-se também os esforços externos, ou seja, a curva de torque do motor acionador do pistão, que é dada por:

$$\sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} = T_{motor} = T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} .$$

Portanto calculando-se todas as derivadas e reorganizando os termos, obtém-se:

$$\ddot{\varphi} = \frac{T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} - \dot{\phi}^2 \cdot m_p \cdot \left[\left(e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right) \cdot \left(e \cdot \cos \varphi + \frac{l \cdot r^2 \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} - \frac{l \cdot r^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right) \right]}{\left[J_v + m_p \cdot \left(e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right)^2 \right]} .$$

Renomeiam-se os seguintes termos:

$$A = e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} , \text{ e;}$$

$$B = e \cdot \cos \varphi + \frac{l \cdot r^2 \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} - \frac{l \cdot r^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} .$$

Repare que A é o termo \dot{x} dividido por $\dot{\phi}$, e B é a derivada de A em φ . Obtem-se assim a seguinte equação:

$$\ddot{\varphi} = \frac{T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \cdot m_p \cdot (A \cdot B)}{(J_v + m_p \cdot A^2)} .$$

E assim o seguinte diagrama de blocos no SCICOS (figura 7):

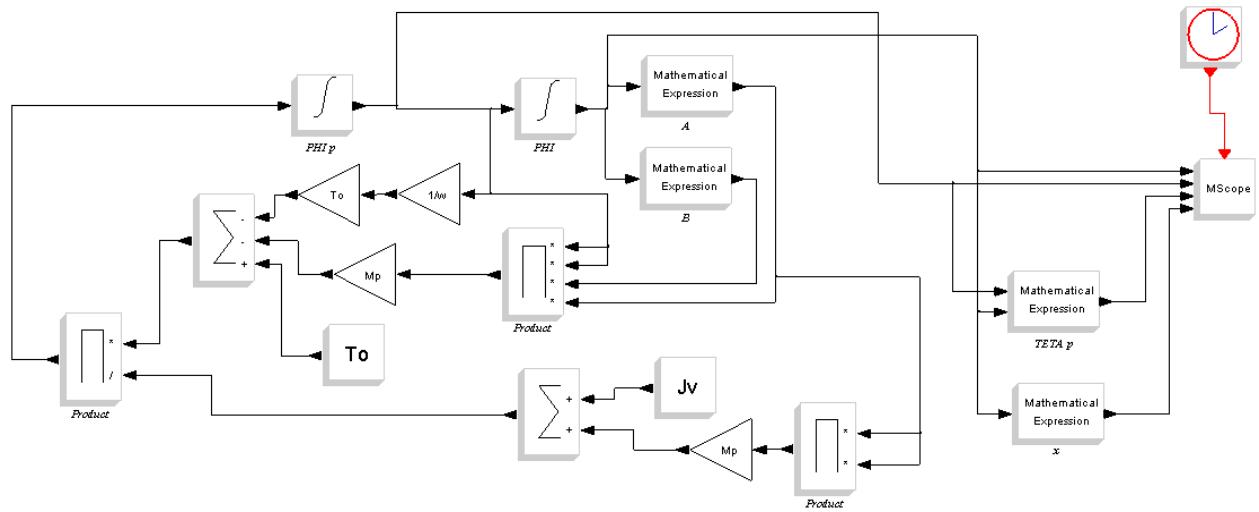


Figura 7: Diagrama de blocos do SCICOS para o sistema 1

Repare que nele foram utilizados os termos A e B para simplificação do diagrama, dentro de dois blocos “Mathematical Funcion” separados. Do diagrama obtém-se não somente $\dot{\varphi}$ e φ , mas também $\dot{\theta}$ e x .

3.2. Sistema 2: Sistema 1 considerando a pressão do ar, gás perfeito e isotérmico

Considere agora também a pressão do ar do cilindro em que o pistão se move. Porém, por simplicidade, considere inicialmente que o ar é um gás perfeito e que o sistema é isotérmico. Dessa forma, obtém-se o sistema representado pela figura 8:

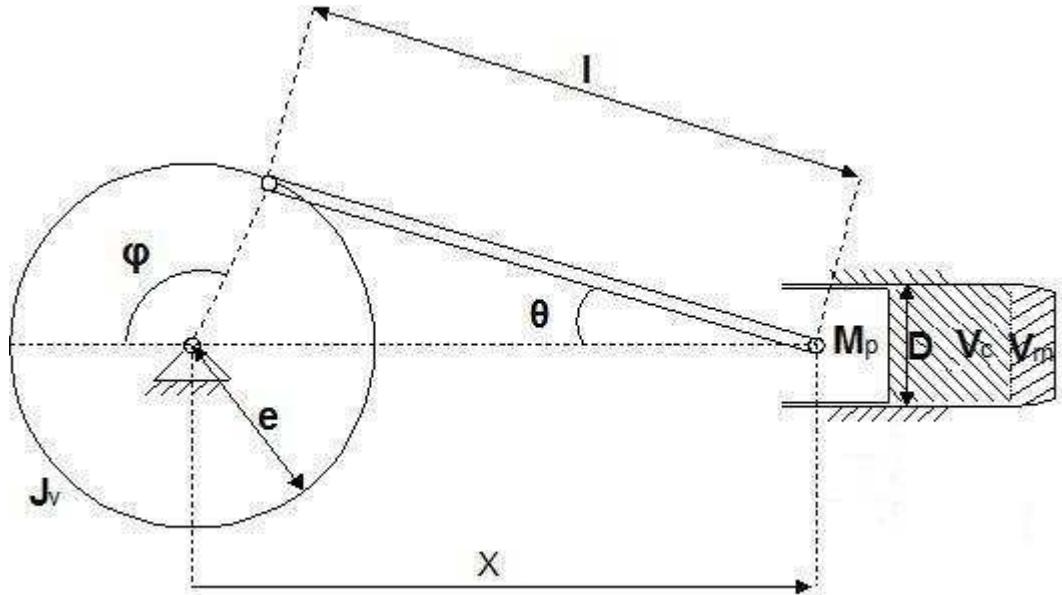


Figura 8: Sistema 2

O sistema, continua sendo composto por: pistão, biela e manivela, mas agora existe mais uma força externa, imposta pela pressão do ar na câmara de compressão.

O volume da câmara é: $V = V_{cilindro} + V_{morto} = \frac{(e + l - x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto}$. Como está se

considerando que o ar é um gás perfeito, o diagrama de um ciclo de pressão-volume da câmara possuirá o seguinte aspecto (figura 9):

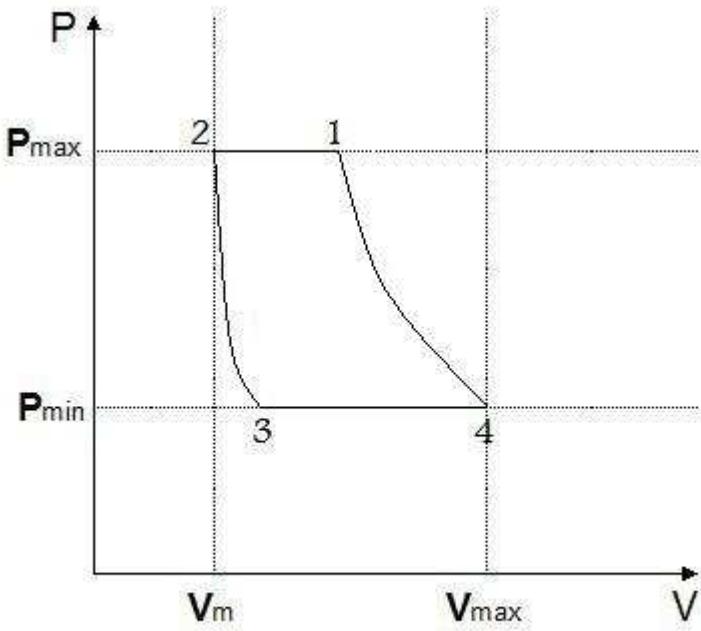


Figura 9: Diagrama P-V do ar na câmara (gás perfeito)

A pressão do gás da câmara durante a fase de sucção será constante e igual à pressão de abertura da válvula de admissão e a pressão na fase de descarga também será constante, mas igual à pressão de abertura da válvula de escape. Já nas outras duas fases, a pressão variará hiperbolicamente com o volume da câmara como dita a equação dos gases perfeitos para o caso isotérmico: $p_1 V_1 = p_2 V_2 = n \cdot R \cdot T$. Assim são obtidas as seguintes fórmulas para pressão do ar na câmara:

$$P_{sucção} = P_{min} ;$$

$$P_{descarga} = P_{max} ;$$

$$P_{compressão} = \frac{m_{compressão} \cdot R \cdot T_{operação}}{M_{ar} \cdot V} = \frac{m_{compressão} \cdot R \cdot T_{operação}}{M_{ar} \cdot \left[\frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right]} , \text{ e;}$$

$$P_{expansão} = \frac{m_{expansão} \cdot R \cdot T_{operação}}{M_{ar} \cdot V} = \frac{m_{expansão} \cdot R \cdot T_{operação}}{M_{ar} \cdot \left[\frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right]} .$$

Para se descobrir a massa na câmara durante as fases de compressão e expansão, utilizam-se as condições de pressão e volume já conhecidos dos pontos 2 e 4 do diagrama da figura 4 (com a temperatura de operação também já conhecida), chegando-se assim nos seguintes valores de massa

de ar na câmara:

$$m_{compressão} = \frac{M_{ar} \cdot P_{min} \cdot V_4}{R \cdot T_{operação}} = \frac{M_{ar} \cdot P_{min} \cdot \left(\frac{2 \cdot e \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right)}{R \cdot T_{operação}}, \text{ e;}$$

$$m_{expansão} = \frac{M_{ar} \cdot P_{max} \cdot V_2}{R \cdot T_{operação}} = \frac{M_{ar} \cdot P_{max} \cdot V_{morto}}{R \cdot T_{operação}}.$$

Ao se substituir nas equações de pressão de compressão e expansão, obtém-se:

$$P_{compressão} = \frac{P_{min} \cdot V_4}{V} = \frac{P_{min} \cdot \left(\frac{2 \cdot e \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right)}{\frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto}}, \text{ e;}$$

$$P_{expansão} = \frac{P_{max} \cdot V_2}{V} = \frac{P_{max} \cdot V_{morto}}{\frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto}}.$$

O resultado das expressões é lógico, pois considerando que durante a compressão ou durante a expansão $PV = \frac{mRT}{M} = cte$, pode-se utilizar uma condição de $P_i V_i$ conhecida em qualquer instante para definir o sistema, não precisando deixar todo o termo em função de $\frac{mRT}{M}$.

Portanto, a força do ar sobre o pistão será:

$$F_{ar, sucção} = (P_{sucção} - P_{atm}) \cdot A = \frac{(P_{min} - P_{atm}) \cdot \pi \cdot D^2}{4};$$

$$F_{ar, descarga} = (P_{descarga} - P_{atm}) \cdot A = \frac{(P_{max} - P_{atm}) \cdot \pi \cdot D^2}{4};$$

$$F_{ar, compressão} = (P_{compressão} - P_{atm}) \cdot A = \frac{P_{min} \cdot \left(\frac{2 \cdot e \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right)}{\frac{(e+l-x) \cdot 4 \cdot V_{morto}}{D^2 \cdot \pi}} - \frac{P_{atm} \cdot \pi \cdot D^2}{4}, \text{ e;}$$

$$F_{ar, expansão} = (P_{expansão} - P_{atm}) \cdot A = \frac{P_{max} \cdot V_{morto}}{\frac{(e+l-x) \cdot 4 \cdot V_{morto}}{D^2 \cdot \pi}} - \frac{P_{atm} \cdot \pi \cdot D^2}{4}.$$

Os esforços externos do novo sistema são:

$$\sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \varphi} = T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} + F_{ar}(-\vec{i}) \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\vec{i}) \quad .$$

Com $x = -e \cdot \cos \varphi + l \cdot \sqrt{1 - (r \cdot \sin \varphi)^2}$, a equação fica:

$$\begin{aligned} \sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} &= T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} + F_{ar}(-\vec{i}) \cdot \frac{\delta(-e \cdot \cos \varphi + l \cdot \sqrt{1 - (r \cdot \sin \varphi)^2})}{\delta \varphi}(\vec{i}) = \\ &= T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} - F_{ar} \left(e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right) \quad . \end{aligned}$$

E a equação diferencial do sistema é, portanto:

$$\ddot{\varphi} = \frac{T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} - \left(e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right) \left[F_{ar} - \dot{\varphi}^2 \cdot m_p \left(e \cdot \cos \varphi + \frac{l \cdot r^2 \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} - \frac{l \cdot r^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right) \right]}{\left[J_v + m_p \left(e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right)^2 \right]} \quad .$$

Com F_{ar} já antes expresso. Usando a mesma nomenclatura de A e B de anteriormente:

$$\begin{aligned} A &= e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad , \text{ e;} \\ B &= e \cdot \cos \varphi + \frac{l \cdot r^2 \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} - \frac{l \cdot r^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad ; \end{aligned}$$

obtém-se a seguinte equação:

$$\ddot{\varphi} = \frac{T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} - A \cdot (F_{ar} + \dot{\varphi}^2 \cdot m_p \cdot B)}{\left(J_v + m_p \cdot A^2 \right)} \quad .$$

O diagrama de blocos do sistema 2 no SCICOS é o seguinte:

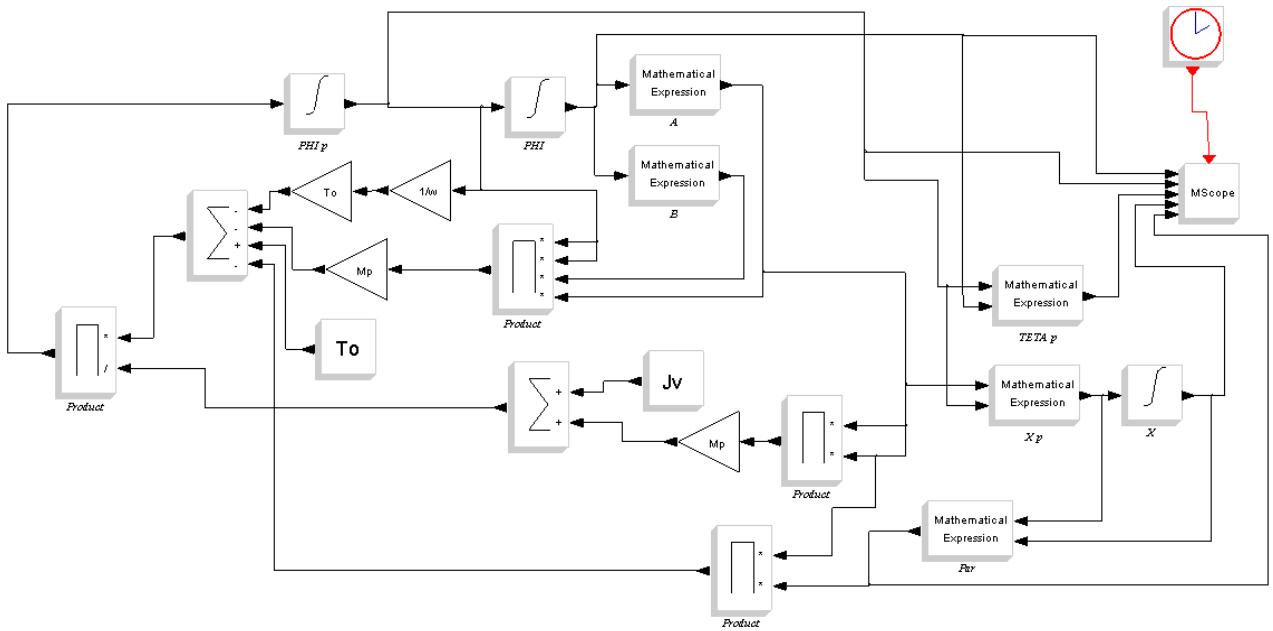


Figura 10: Diagrama de blocos do SCICOS para o sistema 3

Repare que neste novo diagrama de blocos aparece um novo termo referente à força do ar. Tal termo também é medido no MScope para poder se analisar a modelagem do ar dentro da câmara.

3.3. Sistema 3: pistão-bielas-manivela e esforços externos do sistema 2

Considere agora que a biela do sistema também possua massa. O novo sistema é representado pela figura 11:

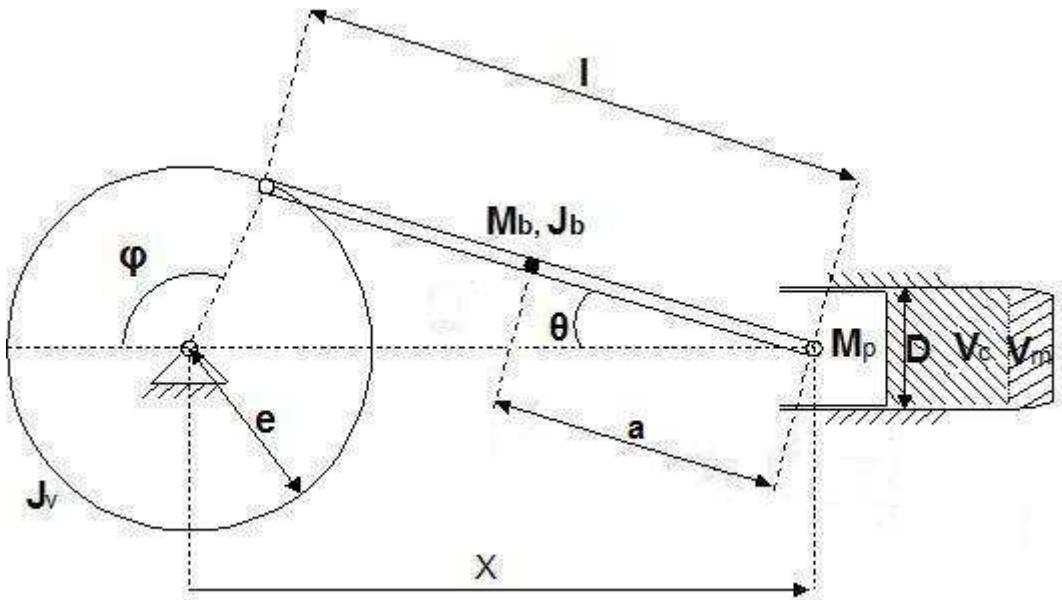


Figura II: Sistema 3

Onde J_b é o momento de inércia da biela com relação ao ponto comum entre biela e pistão, e a é a distância entre esse ponto e o centro de massa da biela.

Novamente a energia cinética do volante será: $T_v = \frac{J_v \cdot \dot{\phi}^2}{2}$, e a energia cinética do pistão será: $T_p = \frac{m_p \cdot \dot{x}^2}{2} = \frac{m_p}{2} \left(e \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right)^2$.

Esses dois elementos possuem energia cinética elementar, pois o pistão possui movimento puramente linear e o volante possue movimento puramente rotativo. Já a biela possui uma composição de movimento rotativo e linear. Recorrendo à forma geral de energia cinética para caso bidimensional (já antes deduzida):

$$T = \frac{V_o \cdot M + 2 \cdot \vec{V}_o \cdot M \cdot \vec{w} \times \vec{R}_{GO} + J \cdot w^2}{2} .$$

Tomando como referencial móvel o ponto de contato da biela com o pistão (que não é o centro de massa da biela), a energia cinética da biela fica:

$$T_b = \frac{1}{2} \cdot m_b \cdot \dot{x}^2 + m_b \cdot \vec{x} \cdot \vec{\theta} \times [a \cdot \sin \theta(\vec{j}) + a \cdot \cos \theta(\vec{i})] + \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 .$$

Como $\vec{x} = \dot{x} \cdot (\vec{i})$ e $\vec{\theta} = \dot{\theta} \cdot (-\vec{k})$, a energia cinética da biela é:

$$T_b = \frac{1}{2} \cdot m_b \dot{x}^2 + m_b \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot a \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 .$$

E assim a energia cinética total do sistema é:

$$T = T_p + T_b + T_v = \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_b \cdot \dot{x}^2 + m_b \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot a \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_v \cdot \dot{\phi}^2 .$$

A energia potencial do sistema é nula, portanto a Lagrangiana do sistema fica:

$$U = 0 \rightarrow L = T - U = T .$$

Para simplificação serão usados as seguintes nomenclaturas (A e B continuam sendo os mesmos termos de antes, e serão adicionados dois novos termos C e D, onde D é a derivada de C em φ e C é o termo $\dot{\theta}$ dividido por $\dot{\phi}$):

$$A = e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} ;$$

$$B = e \cdot \cos \varphi + \frac{l \cdot r^2 \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} - \frac{l \cdot r^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} ;$$

$$C = \frac{r \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} , \text{ e;}$$

$$D = \frac{-r \cdot \sin \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} + \frac{r^3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{(1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} .$$

Utilizando as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \phi} ;$$

calculando as derivadas e reorganizando termos, obtém-se:

$$\ddot{\phi} = \frac{\sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \phi} - \dot{\phi}^2 \cdot [m_p A \cdot B + J_b \cdot C \cdot D + m_b \cdot (A \cdot B + B \cdot C \cdot a \cdot r \cdot \sin \varphi + A \cdot D \cdot a \cdot r \cdot \sin \varphi + A \cdot C \cdot a \cdot r \cdot \cos \varphi)]}{m_p \cdot A^2 + J_v + J_b \cdot C^2 + m_b \cdot (A^2 + 2 \cdot A \cdot C \cdot a \cdot r \cdot \sin \varphi)} .$$

Os esforços externos do sistema 3 são os mesmos do sistema 2, portanto:

$$\sum_i^N \vec{F}_{nc,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \phi} = T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\phi} - F_{ar} \cdot \left(e \cdot \sin \varphi - \frac{l \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right) .$$

E assim a equação diferencial do sistema fica:

$$\ddot{\varphi} = \frac{T_0 - \frac{T_0}{\omega} \cdot \dot{\varphi} - F_{ar} \cdot A - \dot{\varphi}^2 \cdot [m_p A \cdot B + J_b \cdot C \cdot D + m_b \cdot (A \cdot B + B \cdot C \cdot a \cdot r \cdot \sin \varphi + A \cdot D \cdot a \cdot r \cdot \sin \varphi + A \cdot C \cdot a \cdot r \cdot \cos \varphi)]}{m_p \cdot A^2 + J_b \cdot C^2 + m_b \cdot (A^2 + 2 \cdot A \cdot C \cdot a \cdot r \cdot \sin \varphi)} ,$$

onde a F_{ar} é novamente separada em 4 termos:

$$F_{ar, sucção} = (P_{sucção} - P_{atm}) \cdot A = \frac{(P_{min} - P_{atm}) \cdot \pi \cdot D^2}{4} ;$$

$$F_{ar, descarga} = (P_{descarga} - P_{atm}) \cdot A = \frac{(P_{max} - P_{atm}) \cdot \pi \cdot D^2}{4} ;$$

$$F_{ar, compressão} = (P_{compressão} - P_{atm}) \cdot A = \frac{P_{min} \cdot (\frac{2 \cdot e \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto})}{(e + l - x) + \frac{4 \cdot V_{morto}}{D^2 \cdot \pi}} - \frac{P_{atm} \cdot \pi \cdot D^2}{4} , \text{ e;}$$

$$F_{ar, expansão} = (P_{expansão} - P_{atm}) \cdot A = \frac{P_{max} \cdot V_{morto}}{(e + l - x) + \frac{4 \cdot V_{morto}}{D^2 \cdot \pi}} - \frac{P_{atm} \cdot \pi \cdot D^2}{4} .$$

O diagrama de blocos do sistema 3 está mostrado na figura 12:

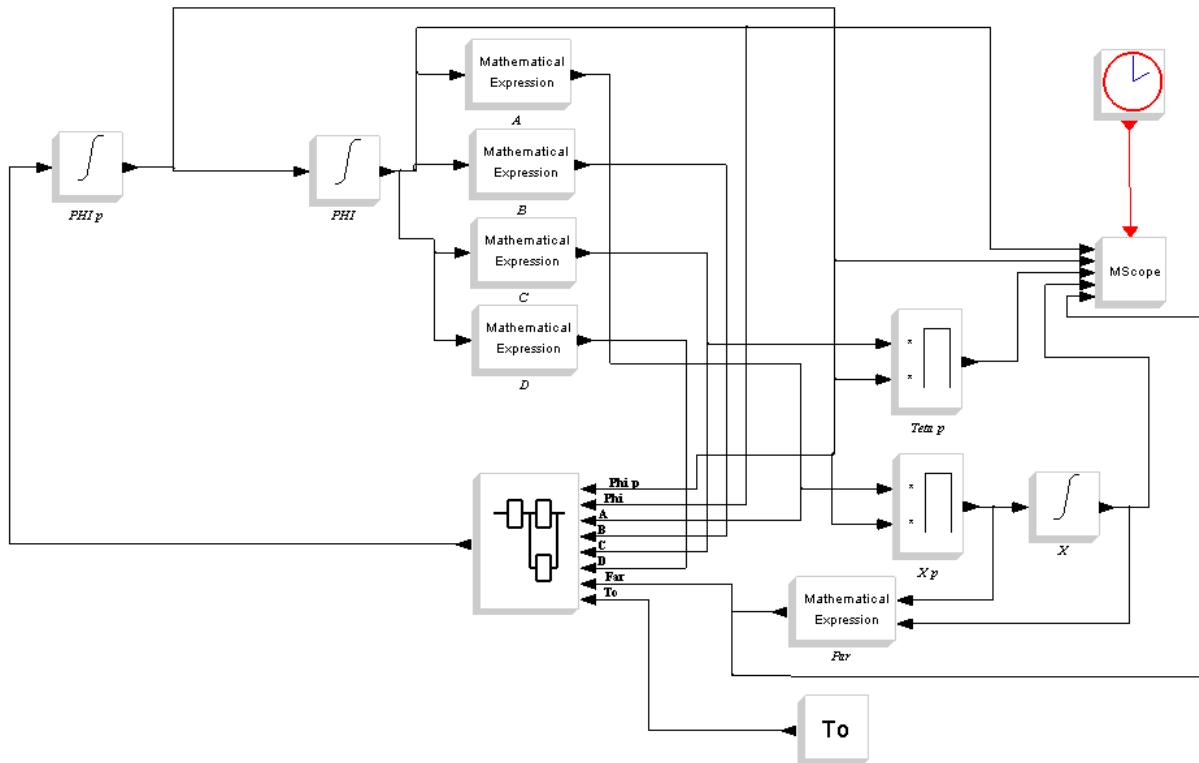


Figura 12: Diagrama de blocos do SCICOS para o sistema 3

Repare que agora, como as equações ficaram relativamente mais compridas, foi usada a

função de “Super-Block” do Scicos para implementar a equação diferencial do sistema. Assim, os termos A, B, C e D, assim como as variáveis φ e $\dot{\varphi}$, o torque do motor e a força do ar são as entradas, e a saída é $\ddot{\varphi}$. Assim como antes, são medidos φ , $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, x e F_{ar} .

Foi usada a função “Super-Block” por esta apresentar vantagem na visualização da expressão matemática com relação à função “Mathematical Funcion”, sendo assim possível também alterar partes da expressão mais facilmente (se deu preferência à “Mathematical Function” somente nos casos de pequenas partes da expressão que não poderiam ser implementadas pela função “Product”). O diagrama de blocos do Super-Bloco é:

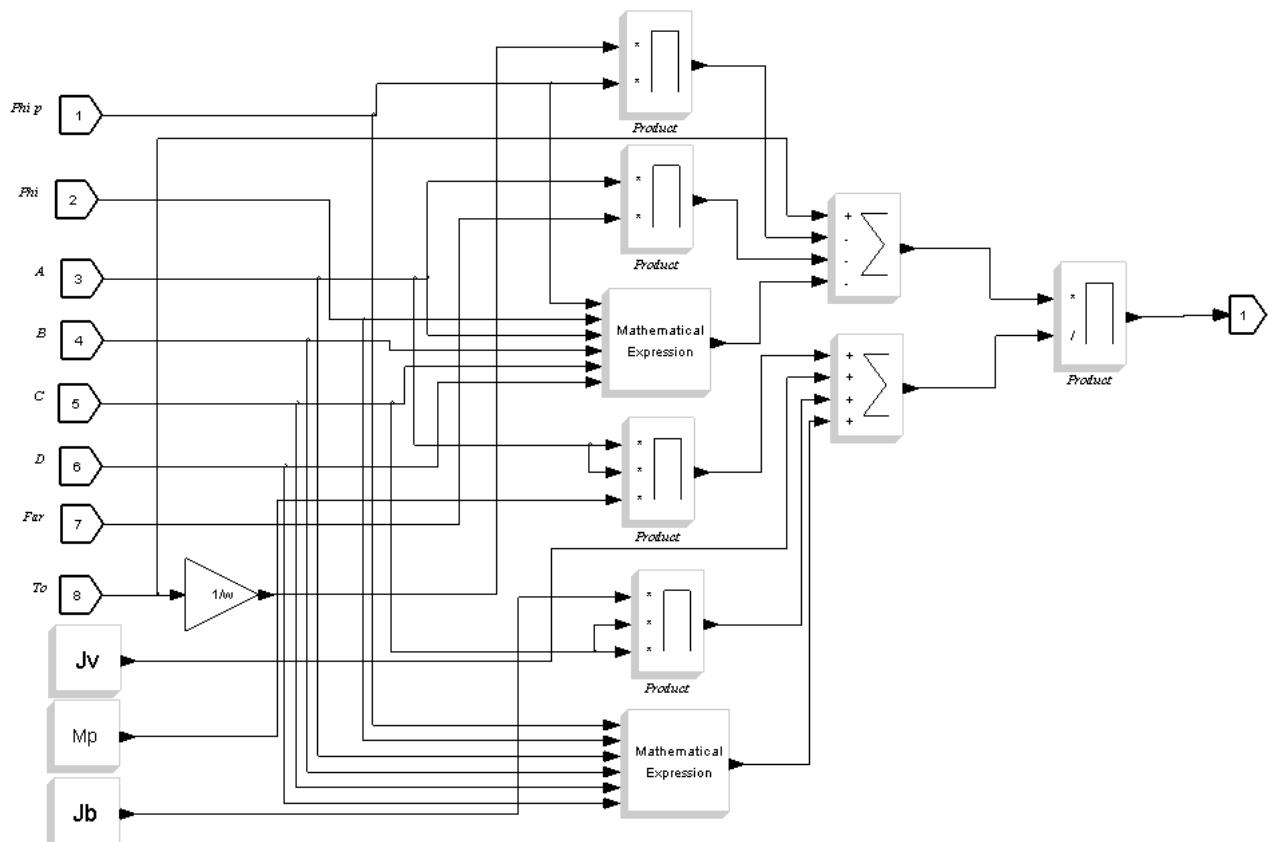


Figura 13: Super Bloco do sistema 3

3.4. Sistema 4: pistão-biela-manivela com pressão do ar, considerando gases perfeitos e sistema adiabático

O sistema 4 é bem semelhante ao sistema 3. Ao se alterarem as características do ar, fica evidente que somente a força externa proveniente da pressão do ar que se alterará, e dessa forma as equações diferenciais serão as mesmas do sistema 3, com F_{ar} ligeiramente diferente.

Como já foi explicado anteriormente, quando o sistema for considerado, ainda com gás perfeito na câmara de compressão, mas agora em um sistema adiabático e não mais istotérmico, a

equação que relaciona a pressão da câmara com o volume será: $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k = C$, onde k é a relação entre os calores específicos do ar a pressão constante C_p e a volume constante C_v .

O valor de k varia conforme a temperatura do gás varia, que é o nosso caso (lembre-se que agora possuímos um sistema adiabático, e não mais isotérmico). Porém, a variação dentro das temperaturas de operação são relativamente pequenas. Para se ter uma idéia, o valor de k para o ar a 27°C é de 1,400; já para a temperatura de 227°C o valor de k é 1,387. Dessa forma, o sistema será simulado considerando k constante e para alguns valores diferentes de k, para assim poder-se comparar tais valores (e saber o quanto aproximadamente o sistema desvia de um real) e não precisar se recorrer a métodos mais complicados.

Já sabemos, da modelagem do sistema 2, que o volume da câmara será:

$$V = V_{cilindro} + V_{morto} = \frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto}$$

As pressões de descarga e sucção continuarão igual às anteriores:

$$P_{sucção} = P_{min} ;$$

$$P_{descarga} = P_{max} .$$

Porém, as pressões de compressão e de expansão terão o termo do volume elevado a k, e ficarão portanto:

$$P_{compressão} = \frac{P_{min} \cdot V_4^k}{V^k} = \frac{P_{min} \cdot \left(\frac{2 \cdot e \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right)^k}{\left[\frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right]^k} ;$$

$$P_{expansão} = \frac{P_{max} \cdot V_2^k}{V^k} = \frac{P_{max} \cdot V_{morto}^k}{\left[\frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right]^k} .$$

Logo, a força do ar, para as quatro etapas diferentes de um ciclo do compressor, será:

$$F_{ar, sucção} = (P_{sucção} - P_{atm}) \cdot A = \frac{(P_{min} - P_{atm}) \cdot \pi \cdot D^2}{4} ;$$

$$F_{ar, descarga} = (P_{descarga} - P_{atm}) \cdot A = \frac{(P_{max} - P_{atm}) \cdot \pi \cdot D^2}{4} ;$$

$$F_{ar, compressão} = (P_{compressão} - P_{atm}) \cdot A = \left(\frac{P_{min} \cdot \left(\frac{2 \cdot e \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right)^k}{\left[\frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right]^k} - P_{atm} \right) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} , \text{ e};$$

$$F_{ar, expansão} = (P_{expansão} - P_{atm}) \cdot A = \left(\frac{P_{max} \cdot V_{morto}^k}{\left[\frac{(e+l-x) \cdot D^2 \cdot \pi}{4} + V_{morto} \right]^k} - P_{atm} \right) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} .$$

3.5. Sistema 5: pistão-biela-manivela, com torque externo linear e mancal não rígido

Nesta modelagem, o mancal onde o volante está apoiado não será mais considerado rígido. Agora seguirá o modelo de mancal não rígido curto anteriormente abordado. Desta forma, o novo sistema seguirá o diagrama da figura (14):

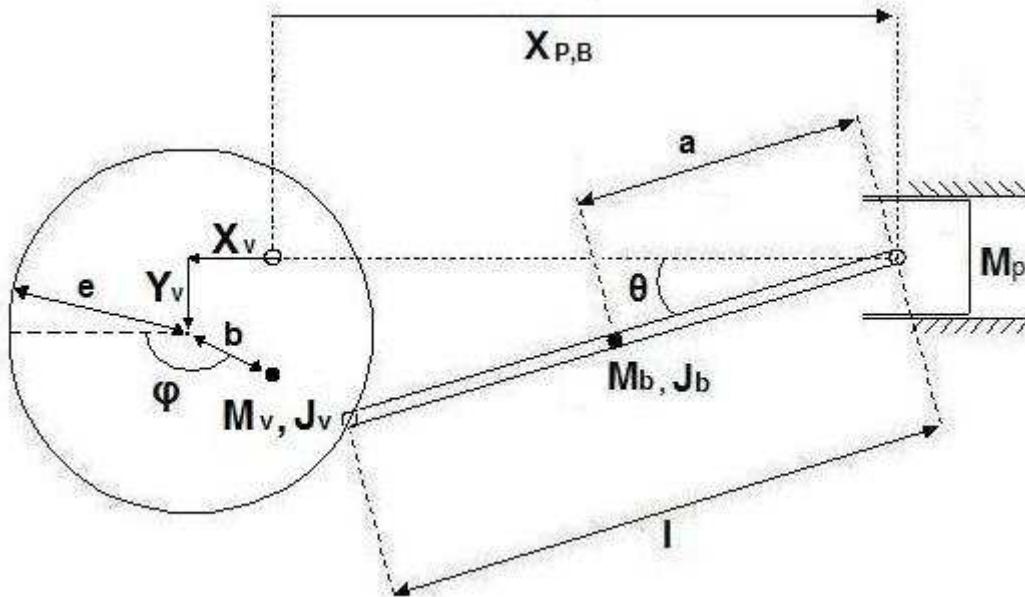


Figura 14: Sistema 5

Nesse novo sistema, temos agora duas variáveis a mais, que são X_v e Y_v . Dessa forma, como pode ser observado da figura, o centro do volante não mais estará posicionado na origem, o que gerará a excentricidade com relação ao seu mancal. Foi incluída também a distância b , do centro de gravidade do volante (que fica na reta entre o centro geométrico do volante e o ponto de contato com a biela) até o centro geométrico do volante. Repare que o ângulo φ foi invertido por

conveniência, para que $\dot{\phi}$ se torne a mesma velocidade angular que ω da teoria de mancais curtos e facilitar as operações algébricas. As forças provenientes da excentricidade do mancal exercidas no volantes estão esquematizadas na figura (15):

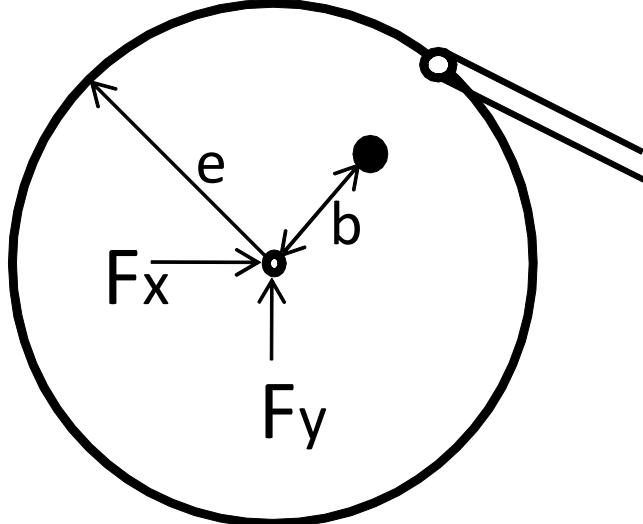


Figura 15: Forças do mancal no volante

E como já visto antes, as forças F_x e F_y serão:

$$F_x = \frac{-\mu \cdot R \cdot L^3}{c^2} \cdot \left[\left(\omega - 2 \cdot \dot{\gamma} \right) \cdot \left(\frac{\pi \cdot \epsilon \cdot a(\epsilon) \cdot \cos(\gamma) - 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \sin(\gamma)}{4 \cdot a(\epsilon)^4} \right) \right] + \dot{\epsilon} \cdot \left[\frac{4 \cdot \epsilon \cdot a(\epsilon) \cdot \cos(\gamma) - \pi \cdot b(\epsilon) \cdot \sin(\gamma)}{2 \cdot a(\epsilon)^5} \right] ;$$

$$F_y = \frac{-\mu \cdot R \cdot L^3}{c^2} \cdot \left[\left(\omega - 2 \cdot \dot{\gamma} \right) \cdot \left(\frac{4 \cdot \epsilon^2 \cdot \cos(\gamma) + \pi \cdot \epsilon \cdot a(\epsilon) \cdot \sin(\gamma)}{4 \cdot a(\epsilon)^4} \right) \right] + \dot{\epsilon} \cdot \left[\frac{\pi \cdot b(\epsilon) \cdot \cos(\gamma) + 4 \cdot \epsilon \cdot a(\epsilon) \cdot \sin(\gamma)}{2 \cdot a(\epsilon)^5} \right] ,$$

com $a(\epsilon) = (1 - \epsilon^2)^{0.5}$ e $b(\epsilon) = (1 + 2 \cdot \epsilon^2)$ e $\omega = \dot{\phi}$.

Serão descobertas agora as novas relações de vínculo entre as coordenadas θ e $x_p = x_B$ em função das coordenadas φ , x_v e y_v . Iniciando com θ , do sistema tem-se a relação:

$$e \cdot \sin \varphi + y_v = l \cdot \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{e \cdot \sin \varphi + y_v}{l} .$$

E, portanto:

$$1 - (\sin \theta)^2 = 1 - \left(\frac{e \cdot \sin \varphi + y_v}{l} \right)^2 = (\cos \theta)^2 \rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{e \cdot \sin \varphi + y_v}{l} \right)^2} ,$$

(somente é verdade porque θ nunca estará no 2º ou 3º quadrante, portanto $\cos \theta$ será sempre positivo).

Já x_p e x_B serão:

$$x_p = x_B = x_v - e \cdot \cos \varphi + l \cdot \cos \theta = x_v - e \cdot \cos \varphi + \sqrt{l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2} .$$

A energia cinética da biela e do pistão serão iguais àquelas do sistema 3 e 4, e portanto:

$$T_b = \frac{1}{2} \cdot m_b \dot{x}_b^2 + m_b \cdot \dot{x}_b \cdot \dot{\theta} \cdot a \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 \quad \text{e} \quad T_p = \frac{m_p \cdot \dot{x}_p^2}{2} \quad .$$

Já a energia cinética do volante não será mais a mesma, pois agora ele possui energia cinética rotacional e translacional. Recorrendo à fórmula geral de energia cinética para corpos rígidos em duas dimensões:

$$T = \frac{V_O \cdot M + 2 \cdot \vec{V}_O \cdot M \cdot \vec{w} \times \vec{R}_{GO} + J \cdot w^2}{2} \quad ,$$

observa-se que a energia cinética do volante resulta em:

$$T_v = \frac{1}{2} \cdot m_v \cdot (\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2) + m_v \cdot (\dot{x}_v \cdot \dot{\varphi} \cdot b \cdot \sin \varphi + \dot{y}_v \cdot \dot{\varphi} \cdot b \cdot \cos \varphi) + \frac{1}{2} J_v \dot{\varphi}^2 \quad ,$$

portanto:

$$T_v = \frac{1}{2} \cdot m_v \cdot (\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2) + m_v \cdot (\dot{x}_v \cdot \dot{\varphi} \cdot b \cdot \sin \varphi + \dot{y}_v \cdot \dot{\varphi} \cdot b \cdot \cos \varphi) + \frac{1}{2} J_v \dot{\varphi}^2 \quad .$$

Usando Lagrange, obtém-se as equações diferenciais do sistema 5:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\left[\begin{array}{l} (D_3 + F_y) \cdot \frac{A_1}{A_3} - D_1 - T \\ C_3 \cdot \frac{A_1}{A_3} - C_1 \end{array} \right] \cdot \left(C_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} - C_1 \right) - (D_2 + F_x) \cdot \frac{A_1}{A_2} + D_1 + T}{\left[\begin{array}{l} B_3 \cdot \frac{A_1}{A_3} - B_1 \\ C_3 \cdot \frac{A_1}{A_3} - C_1 \end{array} \right] \cdot \left(C_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} - C_1 \right) - B_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} + B_1} ;$$

$$\ddot{x}_v = \frac{\left[\begin{array}{l} (D_3 + F_y) \cdot \frac{B_1}{B_3} - D_1 - T \\ C_3 \cdot \frac{B_1}{B_3} - C_1 \end{array} \right] \cdot \left(C_2 \cdot \frac{B_1}{B_2} - C_1 \right) - (D_2 + F_x) \cdot \frac{B_1}{B_2} + D_1 + T}{\left[\begin{array}{l} A_3 \cdot \frac{B_1}{B_3} - A_1 \\ C_3 \cdot \frac{B_1}{B_3} - C_1 \end{array} \right] \cdot \left(C_2 \cdot \frac{B_1}{B_2} - C_1 \right) - A_2 \cdot \frac{B_1}{B_2} + A_1} \quad , \text{ e;}$$

$$\ddot{y}_v = \frac{\begin{bmatrix} (D_3 + F_y) \cdot \frac{A_1}{A_3} - D_1 - T \\ B_3 \cdot \frac{A_1}{A_3} - B_1 \end{bmatrix} \cdot \left(B_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} - B_1 \right) - (D_2 + F_x) \cdot \frac{A_1}{A_2} + D_1 + T}{\begin{bmatrix} C_3 \cdot \frac{A_1}{A_3} - C_1 \\ B_3 \cdot \frac{A_1}{A_3} - B_1 \end{bmatrix} \cdot \left(B_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} - B_1 \right) - C_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} + C_1},$$

com termos A_1 a D_3 :

$$A_1 = m_v \cdot b \cdot \sin(\varphi) + (m_B + m_P) \cdot E_3 + \frac{(e \cdot \sin(\varphi) + y_v) \cdot m_B \cdot a \cdot e \cdot \cos \varphi}{l} ;$$

$$A_2 = m_v + m_B + m_P ;$$

$$A_3 = (m_B + m_P) \cdot E_4 + \frac{m_b \cdot a \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} ;$$

$$B_1 = J_v + J_B \cdot \left(\frac{e \cdot \cos \varphi}{E_5} \right)^2 + (m_B + m_P) E_3 \cdot \left[e \cdot \sin \varphi - \frac{e \cdot \cos \varphi \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} \right] + \dots$$

$$\dots m_B \cdot a \cdot \left[\frac{E_3 \cdot e \cdot \cos \varphi}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} + \frac{e \cdot \cos \varphi}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} \cdot \left(e \cdot \sin \varphi - \frac{e \cdot \cos \varphi \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} \right) \right] ;$$

$$B_2 = m_v \cdot b \cdot \sin \varphi + (m_P + m_P) \cdot \left[e \cdot \sin \varphi - \frac{e \cdot \cos \varphi \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} \right] + \frac{m_b \cdot a \cdot e \cdot \cos \varphi}{E_5} \cdot \left(\frac{e \cdot \sin \varphi + y_v}{l} \right) ;$$

$$B_3 = -m_v \cdot b \cdot \cos \varphi + \frac{J_b \cdot e \cdot \cos \varphi}{E_5^2} + (m_B + m_P) \cdot E_4 \cdot \left[e \cdot \sin \varphi - \frac{e \cdot \cos \varphi \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} \right] + \dots$$

$$\dots m_B \cdot a \cdot \left[\frac{E_4 \cdot e \cdot \cos \varphi}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} + \left(e \cdot \sin \varphi - \frac{e \cdot \cos \varphi \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} \right) \cdot \frac{1}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} \right] ;$$

$$C_1 = -m_v \cdot b \cdot \cos \varphi + \frac{J_b \cdot e \cdot \cos \varphi}{E_5^2} - \frac{(m_B + m_P) \cdot E_3 \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} + m_b \cdot a \cdot \left[\frac{E_3}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} - \frac{e \cdot \cos \varphi \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2}{E_5^2 \cdot l} \right] ;$$

$$C_2 = -(m_B + m_P) \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} + \frac{m_B \cdot a}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} ;$$

$$C_3 = m_v - (m_B + m_P) \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{E_5} \cdot E_4 + \frac{J_b}{E_5^2} + m_B \cdot a \cdot \left[\frac{E_4}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} - \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)^2}{E_5^2 \cdot l} \right] ;$$

$$D_1 = - \left\{ \frac{J_b \cdot e \cdot \cos \varphi}{E_5} \cdot E_6 + (m_b + m_p) \cdot E_3 \cdot E_7 + m_B \cdot a \cdot \left[\frac{E_3 \cdot E_6 \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} + \frac{E_3 \cdot E_2 \cdot (e \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \dot{y}_v)}{l} \right] \right\} + \dots$$

$$\dots - m_B \cdot a \cdot \left[\frac{e \cdot \cos \varphi}{E_5} \cdot \frac{E_7 \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} + \frac{e \cdot \cos \varphi}{E_5} \cdot \frac{E_1 \cdot (e \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \dot{y}_v)}{l} - \frac{E_1 \cdot E_2 \cdot e \cdot \cos \varphi}{l} \right] ;$$

$$D_2 = - \left\{ m_v \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot b \cdot \cos \varphi + (m_B + m_P) \cdot E_7 + m_b \cdot a \cdot \left[E_6 \cdot \left(\frac{e \cdot \sin \varphi + y_v}{l} \right) + E_2 \cdot \left(\frac{e \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}_v}{l} \right) \right] \right\} , e ;$$

$$D_3 = -m_b \cdot a \cdot \left[E_4 \cdot E_6 \cdot \left(\frac{e \cdot \sin \varphi + y_v}{l} \right) + E_4 \cdot E_2 \cdot \left(\frac{e \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}_v}{l} \right) + \frac{E_7}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{l} \right] + \dots$$

$$\dots - m_B \cdot a \left[\frac{E_1}{E_5} \cdot \frac{(e \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}_v)}{l} - \frac{E_1 \cdot E_2}{l} \right] - \left[m_v \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot b \cdot \sin \varphi + \frac{J_b \cdot E_6}{E_5} + (m_B + m_P) \cdot E_7 \cdot E_4 \right] ,$$

e os termos de E_1 a E_7 :

$$E_1 = \dot{x}_v + e \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v) \cdot (e \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \dot{y}_v)}{(l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5}} ;$$

$$E_2 = \frac{(e \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \dot{y}_v)}{(l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5}} ;$$

$$E_3 = e \cdot \sin \varphi - \frac{(e \cdot \sin \varphi + y_v) \cdot e \cdot \cos \varphi}{(l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5}} ;$$

$$E_4 = \frac{-(e \cdot \sin \varphi + y_v)}{(l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5}} ;$$

$$E_5 = (l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5} ;$$

$$E_6 = \frac{-e \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi \cdot (l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5} + \frac{(e \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \dot{y}_v)^2 \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)}{(l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5}}}{l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2} , e;$$

$$E_7 = e \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi - \frac{[(e \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \dot{y}_v)^2 - e \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)] \cdot (l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5} + \frac{(e \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \dot{y}_v)^2 \cdot (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2}{(l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2)^{0.5}}}{l^2 - (e \cdot \sin \varphi + y_v)^2} .$$

3.6. Sistema 6: pistão-biela-manivela, com torque externo linear e 3 mancais não rígidos

O sistema 6, e os sistemas posteriores, mais complexos, serão simulados no software ADAMS, da MSC, que permite uma flexibilidade maior na alteração de todo o sistema. Será realizada uma comparação entre tal sistema e o sistema 5, para a validação da utilização do software. Tal sistema, pode ser observado na Figura 16:

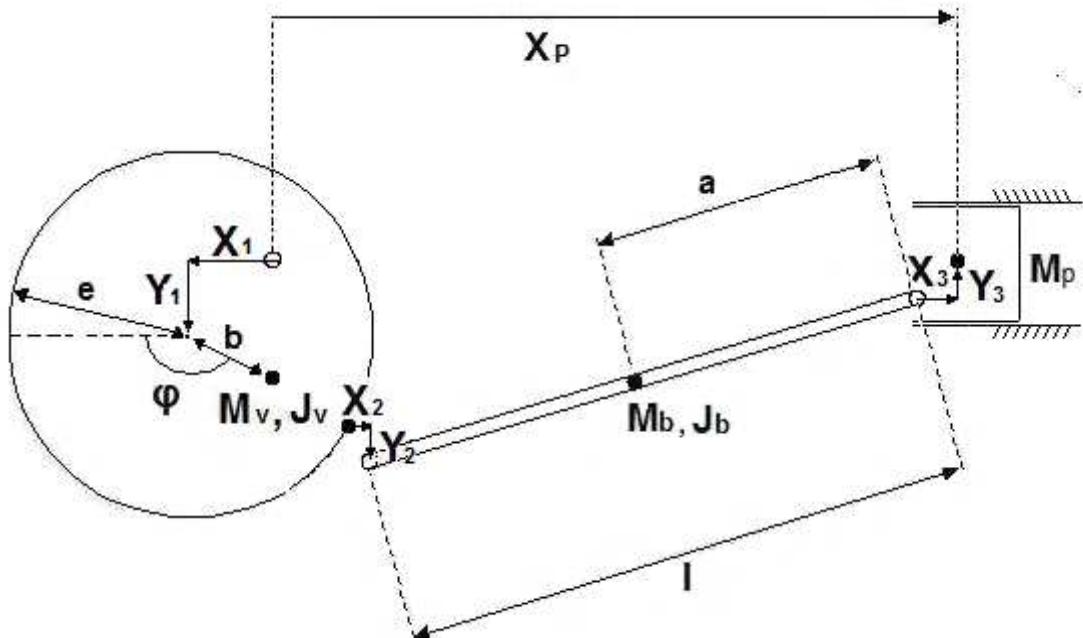


Figura 16: Sistema 6

Percebe-se que nesse sistema foram adicionadas as variáveis X_2 , X_3 , Y_2 e Y_3 , que exprimem a excentricidade entre os pontos de contato da biela com o volante, e da biela com o pistão. Os índices 1, 2 e 3, representam os mancais hidrodinâmicos entre o mancal do sistema e o volante, entre o volante e a biela, e entre a biela e o pistão, respectivamente.

Não é necessária a dedução das equações diferenciais do sistema para a simulação do sistema utilizando o software ADAMS. O arquivo do modelo construído está anexo em mídia digital que se encontra junto a este trabalho.

3.7. Sistema 7: pistão-biela-manivela com pressão do ar, considerando gases perfeitos e sistema adiabático, com torque externo proveniente de um motor elétrico de indução monofásico e 3 mancais não rígidos

No sistema 7 a pressão na câmara de compressão volta a estar presente e agora ao invés de o acionamento ser feito por um motor teórico, é realizado por um motor real, elétrico, de indução, monofásico. O motor escolhido foi o Steel Motor NEMA 56 de 0,18kW (categoria N) da Weg, por possuir potência similar àquela que foi utilizada nos sistemas anteriores. Os pontos tabelados de torque para tal motor são:

- Torque inicial: 1,5Nm;
- Torque máximo: 1,75Nm;

- Torque nominal: 0,5Nm (à rotação de 3480 rpm).

A curva do torque pela rotação de motores da categoria N da Weg pode ser vista na Figura 17:

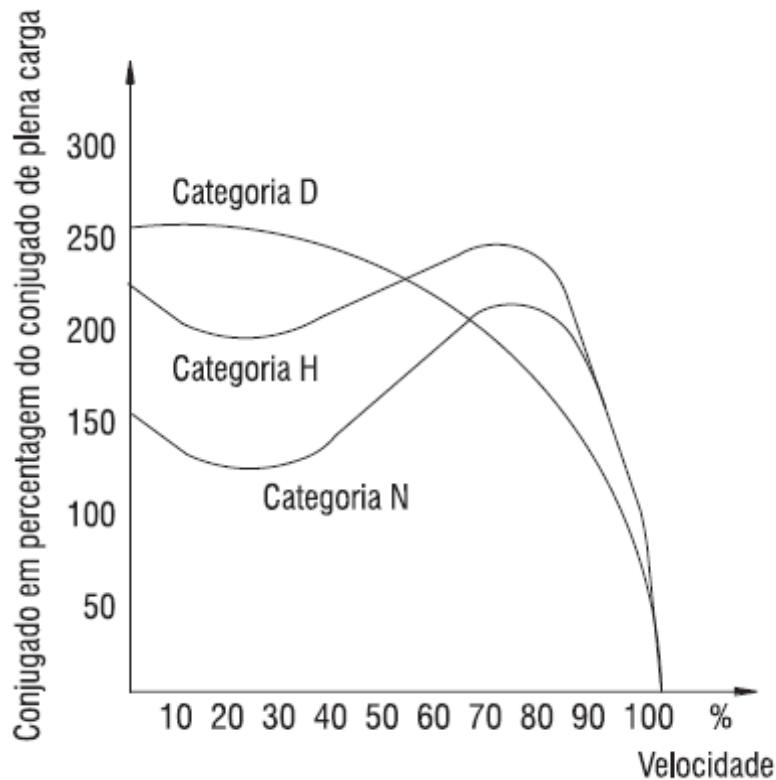


Figura 17: Curvas de Torque x Rotação para as diferentes categorias de motores da Weg

Fonte: Catálogo de Motores Elétricos - Baixa Tensão (Mercado Brasil) da Weg

A partir da curva de torque por rotação do motor, e de alguns pontos tabelados é possível construir, usando a regra de três, uma curva aproximadora para o motor específico a ser utilizado. Tal curva pode ser encontrada na Figura 18:

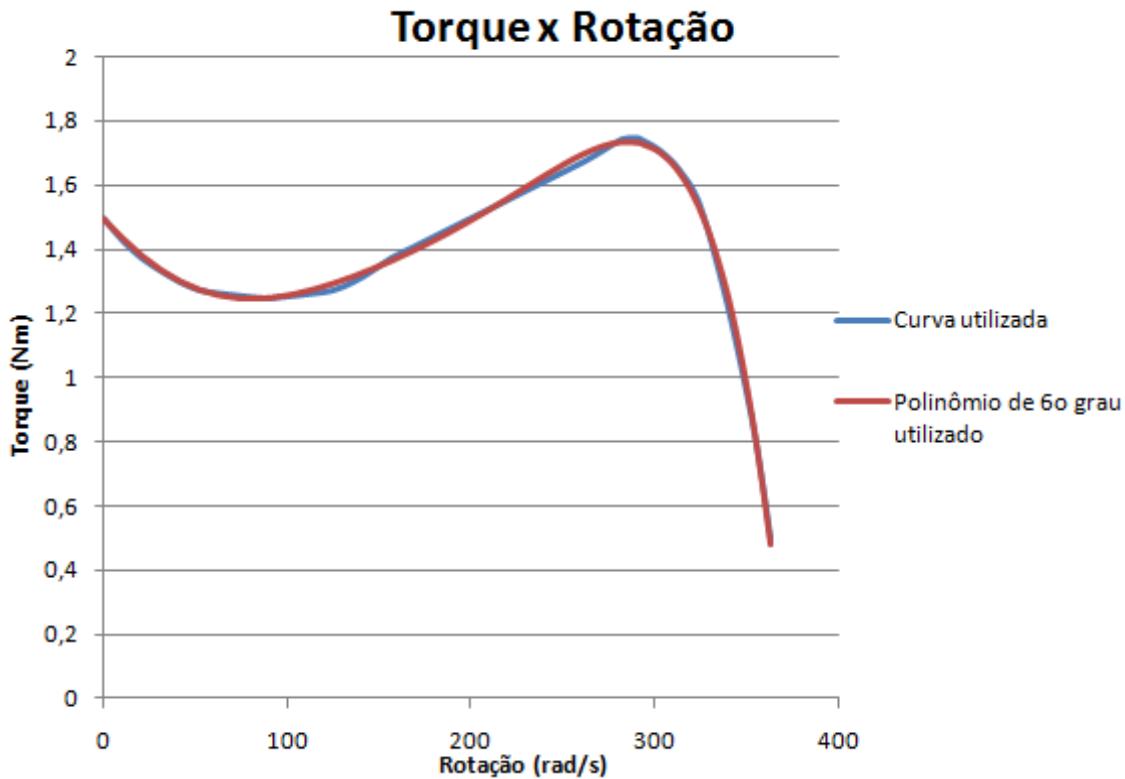


Figura 18: Torque x Rotação do Steel Motor NEMA 56, 0,18kW

No gráfico já se encontra também o polinômio de 6º grau utilizado para a aproximação da curva. Tal polinômio é:

$$T = -1,72 \cdot 10^{-14} \cdot \dot{\phi}^6 + 1,35 \cdot 10^{-11} \cdot \dot{\phi}^5 - 3,83 \cdot 10^{-9} \cdot \dot{\phi}^4 + 3,94 \cdot 10^{-7} \cdot \dot{\phi}^3 + 2,47 \cdot 10^{-5} \cdot \dot{\phi}^2 - 6,14 \cdot 10^{-3} \cdot \dot{\phi} + 1,50$$

3.8. Sistema 8: sistema 7 mais atrito viscoso proveniente dos mancais hidrodinâmicos

O sistema 8 é exatamente igual ao sistema 7, porém é adicionada a fórmula de atrito viscoso para o mancal do sistema, assim como para as outras duas juntas, explicitada no capítulo Fehler: Referenz nicht gefunden.

4. Simulações

Neste capítulo serão realizadas algumas simulações preliminares variando os parâmetros do compressor para se tomar conhecimento de algumas das curvas características desses. Os parâmetros serão também variados para se observar a influência de cada um deles nas curvas.

4.1. Simulações do Sistema 1

Utilizando os parâmetros:

$J_v = 0,005 \text{ kg m}^2$; $T_o = 2\text{N m}$; $\omega = 188,5 \text{ rad/s}$; $M_p = 1\text{kg}$; $e = 0,025 \text{ m}$; $l = 0,1 \text{ m}$, obtiveram-se os seguintes gráficos:

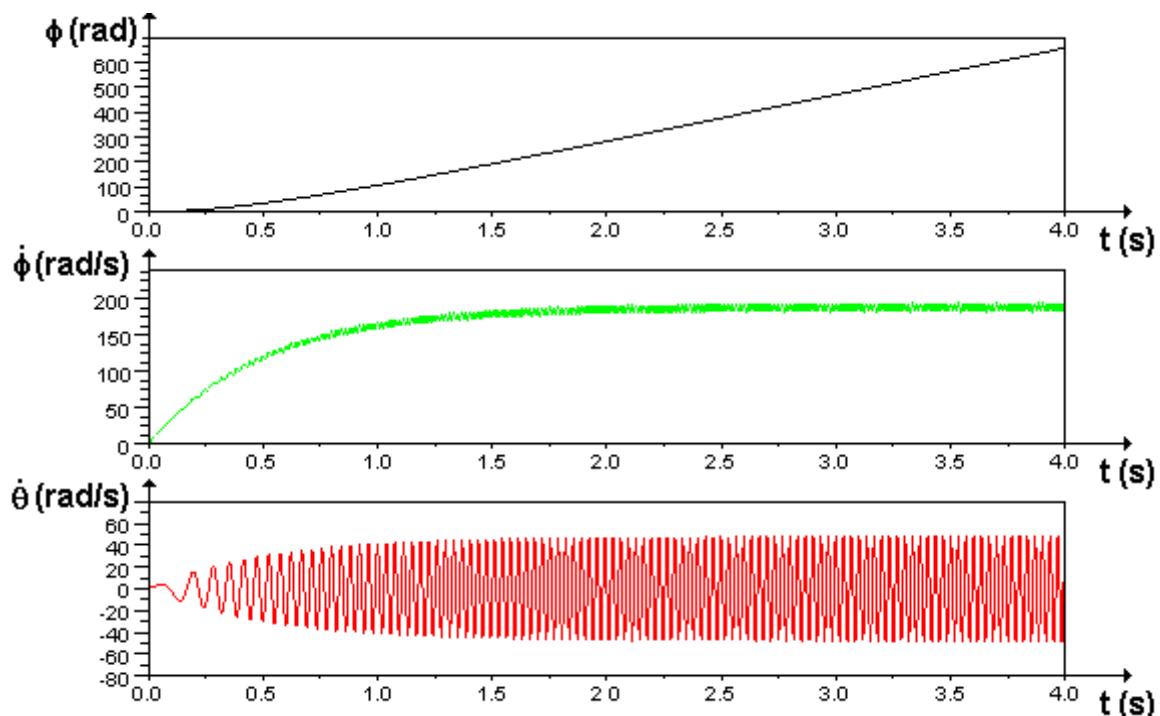


Figura 19: Simulação do Sistema 1

Pelos gráficos, observa-se que o volante acelera até chegar à velocidade de operação após aproximadamente dois segundos. Era o esperado, pois a partir desse momento o torque do motor fica na média igual a zero. Repare que $\dot{\phi}$ oscila ao redor da velocidade de operação. Isso ocorre porque, como somente o pistão e o volante possuem massa, para o sistema manter a energia cinética total constante (pois, como já dito, a partir desse instante o torque do motor é na média igual a zero), quando o pistão está com velocidade mínima, o volante estará com velocidade máxima, e vice versa.

Já velocidade de oscilação da biela e do pistão devem ser proporcionais à velocidade rotacional do volante, portanto percebe-se que a oscilação de $\dot{\theta}$ aumenta até chegar na operação.

Variando o momento de inércia do pistão, obtém-se:

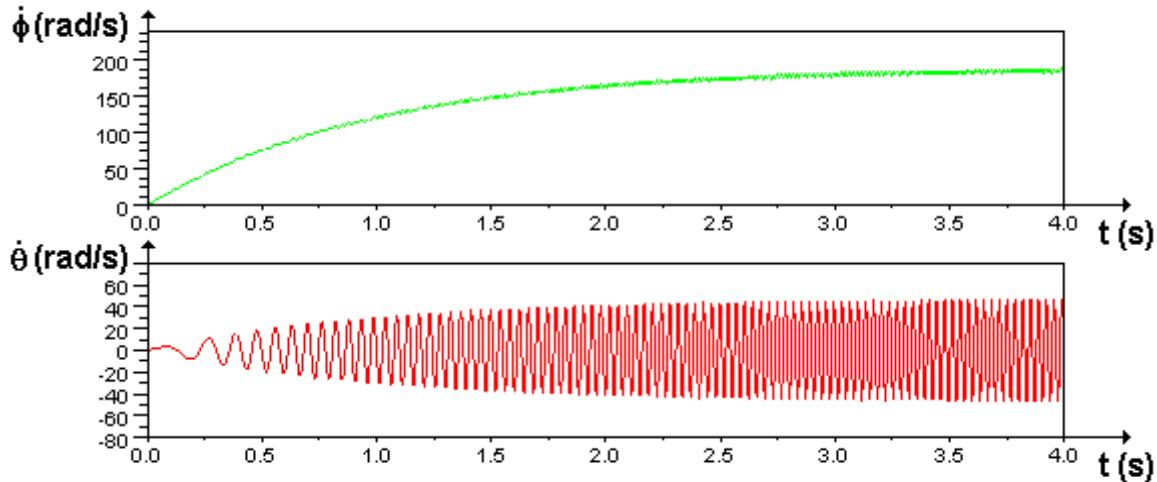


Figura 20: Sistema 1, com $J_v = 0,01 \text{ kg m}^2$

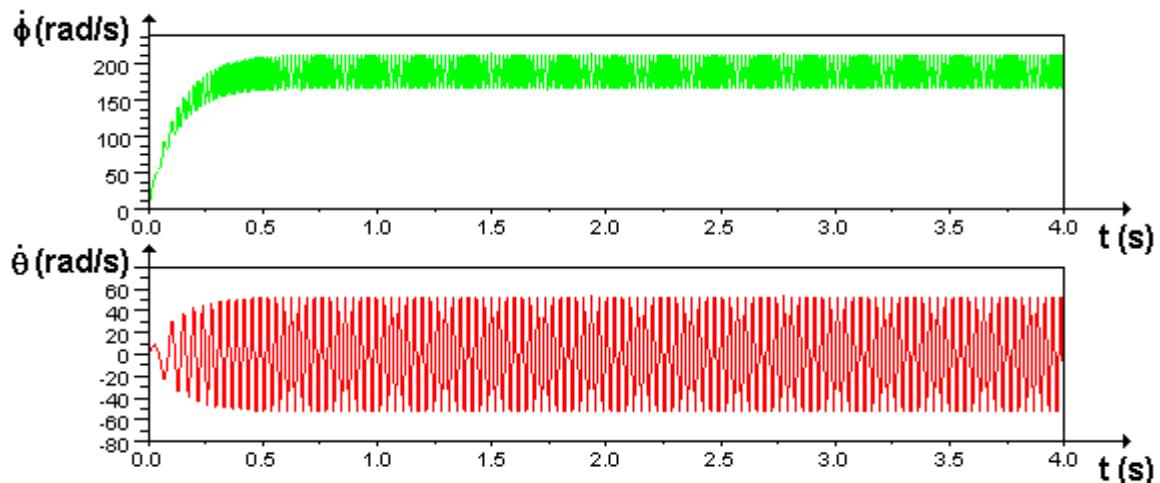


Figura 21: Sistema 1, com $J_v = 0,001 \text{ Kg m}^2$

Percebem-se duas influências do momento de inércia nas curvas. A primeira é o tempo para o sistema atingir a velocidade de operação: quando se aumenta o momento de inércia do pistão, aumenta-se também o período até se atingir a velocidade de operação e vice-versa.

Já a segunda é com relação à oscilação de $\dot{\phi}$ ao redor de ω : quanto menor a massa, maior, e vice-versa. Isso se dá justamente porque a velocidade de rotação do volante varia para compensar a variação da energia cinética do pistão, assim, se o momento de inércia for maior, terá

que variar menos para compensar uma mesma quantidade de energia cinética, e vice versa.

Variando agora a massa do pistão, observa-se grandes semelhanças à variação do momento de inércia do volante:

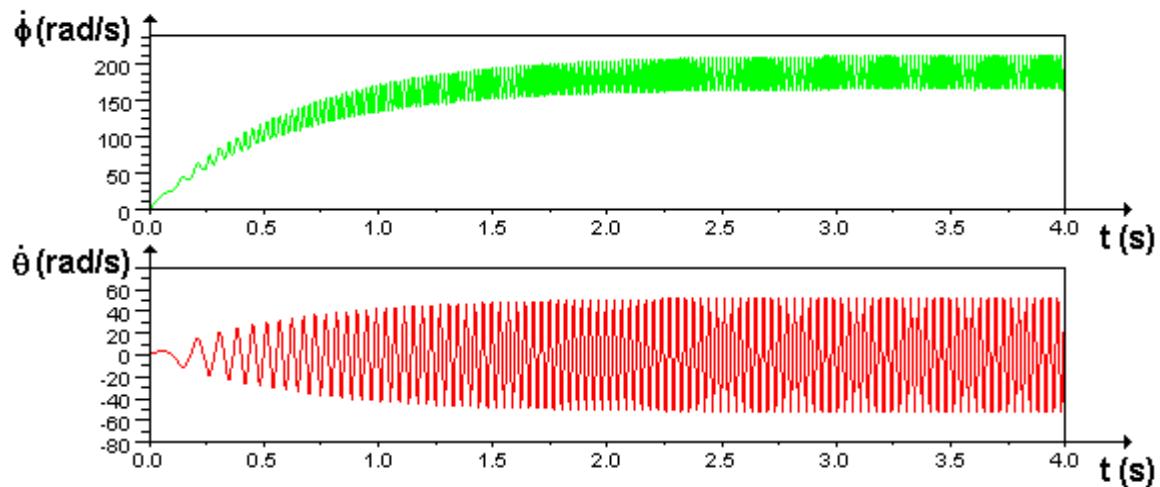


Figura 22: Sistema 1, com $M_p = 5 \text{ kg}$

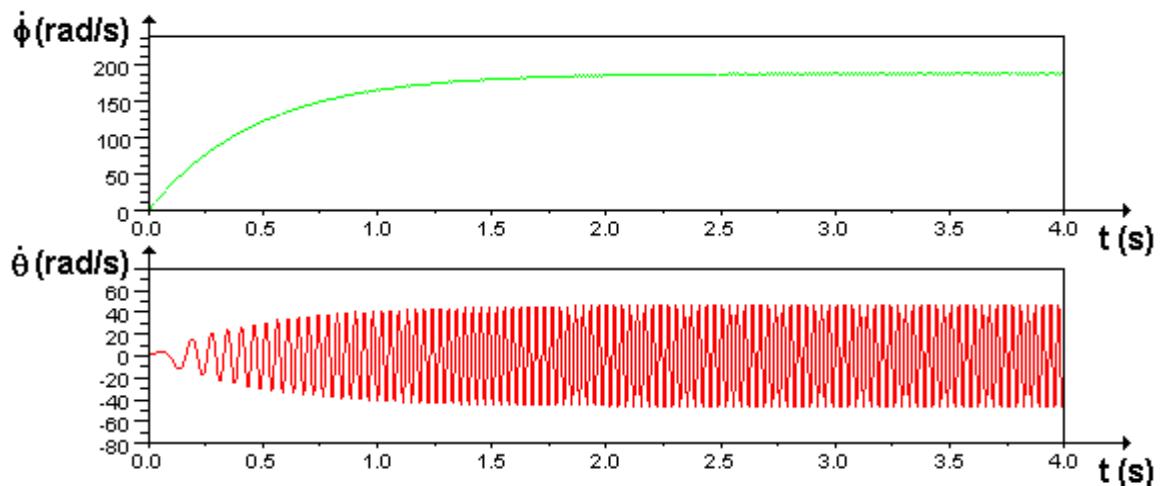


Figura 23: Sistema 1, com $M_p = 0,1 \text{ kg}$

Percebe-se que quanto maior a massa do pistão maior a variação de $\dot{\phi}$ ao redor de ω . Ou seja, quanto maior a massa do pistão, maior a energia a ser compensada pelo volante e maior a oscilação da sua velocidade de rotação e vice versa.

Pelos gráficos não fica aparente, mas o tempo que o sistema demora para chegar na velocidade de operação é também dependente da massa do pistão. Isso pode ser claramente notado pela equação diferencial do Sistema 1, onde a massa do pistão é encontrada no denominador.

Dos gráficos fica evidente que a alteração de M_p tem maior influência na oscilação de $\dot{\phi}$ e pouca influência sobre a aceleração total do sistema, enquanto que a alteração de J_v tem influências mais equilibradas. Isso se dá porque o pistão a cada ciclo é acelerado e desacelerado de zero até a velocidade máxima do ciclo, enquanto que o volante só acelera e desacelera o suficiente para compensar a alteração de energia cinética do pistão, nunca chegando a zero (pois se em algum momento o volante possuir velocidade de rotação igual a zero o sistema todo estará em repouso, como pode ser observado nas equações de \dot{x} e $\dot{\theta}$).

Como o volante possui uma menor variação percentual da velocidade de rotação e o pistão uma variação percentual da velocidade linear maior, para ambos causarem o mesmo efeito na aceleração total do sistema o pistão deverá ter uma alteração na massa que cause uma alteração na oscilação de $\dot{\phi}$ grande, enquanto que o volante deverá ter uma alteração no seu momento de inércia que cause alterações na oscilação de $\dot{\phi}$ não tão grandes. Efeitos similares serão observados quando for adicionada a massa da biela, no Sistema 3.

Variando agora o último parâmetro possível do sistema 1, que é a relação entre l e e , obtém-se:

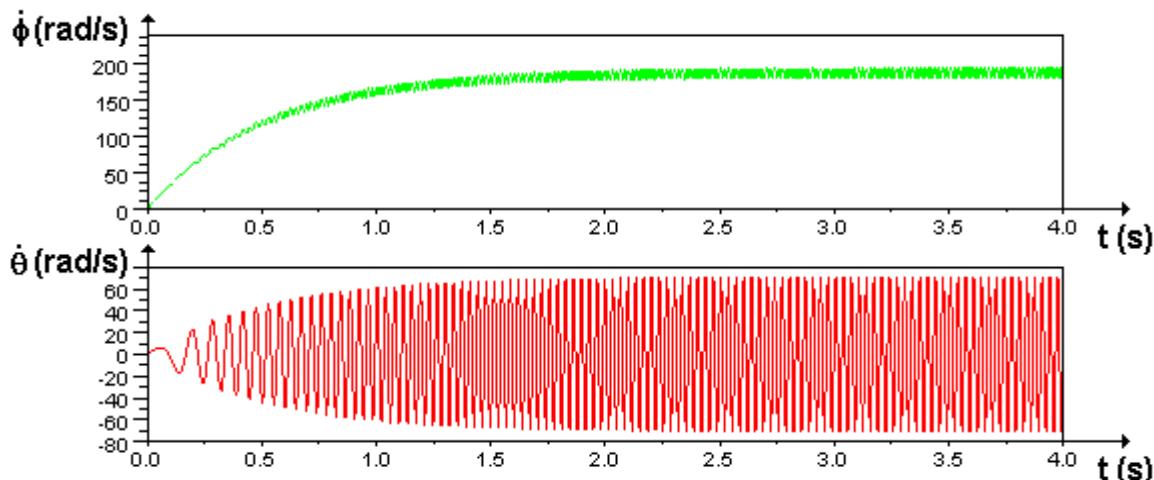


Figura 24: Sistema 1, com $l = 0,15m$; $e = 0,02m$

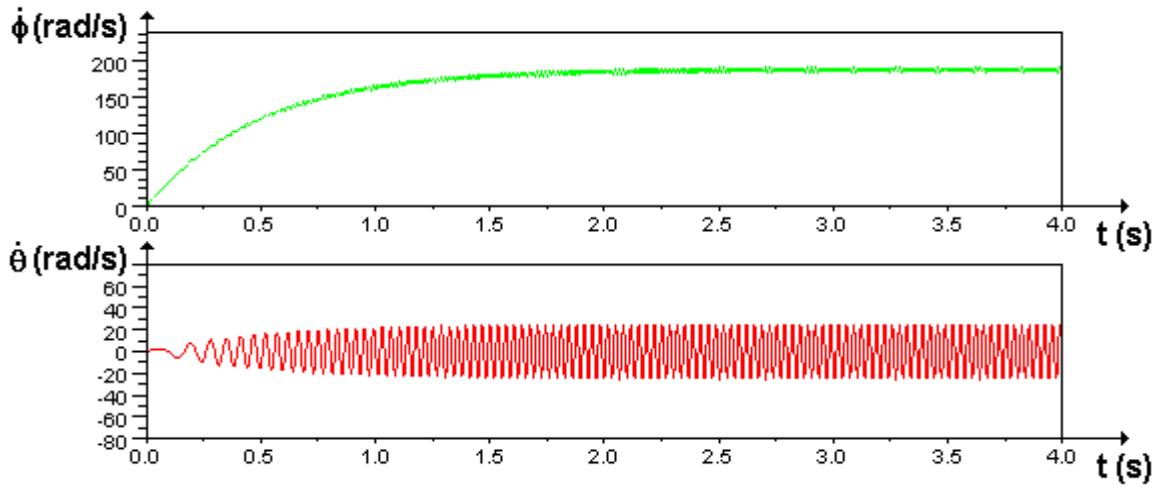


Figura 25: Sistema 1, com $l = 0,075m$; e $e = 0,0275m$

Percebe-se que a oscilação total de $\dot{\theta}$ e a oscilação de $\dot{\phi}$ em torno de ω assim como o tempo de estabilização do sistema são afetados. Isso ocorre porque o caminho percorrido pelo pistão varia (somente por causa de e), portanto se esse for maior, a velocidade do pistão terá que ser mais elevada para percorrer o mesmo caminho no mesmo tempo (aumentando a oscilação de $\dot{\theta}$).

Maior velocidade do pistão significa maior energia cinética média e assim uma quantidade maior de energia externa (torque do motor) a ser injetada, e portanto um tempo maior de estabilização. Significa também maior variação de energia cinética do pistão a ser compensada, e, portanto, uma maior variação de $\dot{\phi}$ em torno de ω , O oposto se observa quando se diminui e .

O efeito da variação de l é perceptível somente em $\dot{\theta}$, pois com a variação do comprimento da biela, altera-se também a variação total de θ (ou seja, se a biela for mais comprida θ variará menos em uma revolução do volante).

4.2. Simulações do Sistema 2

Com os parâmetros antes utilizados no sistema 1, mais:

$$D=0,004\text{ m} ; P_{max}=180\,000 \text{ N/m}^2 ; P_{min}=100\,000 \text{ N/m}^2 ; P_{atm}=100\,00 \text{ N/m}^2 ; V_{morto}=6,28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

obtém-se:

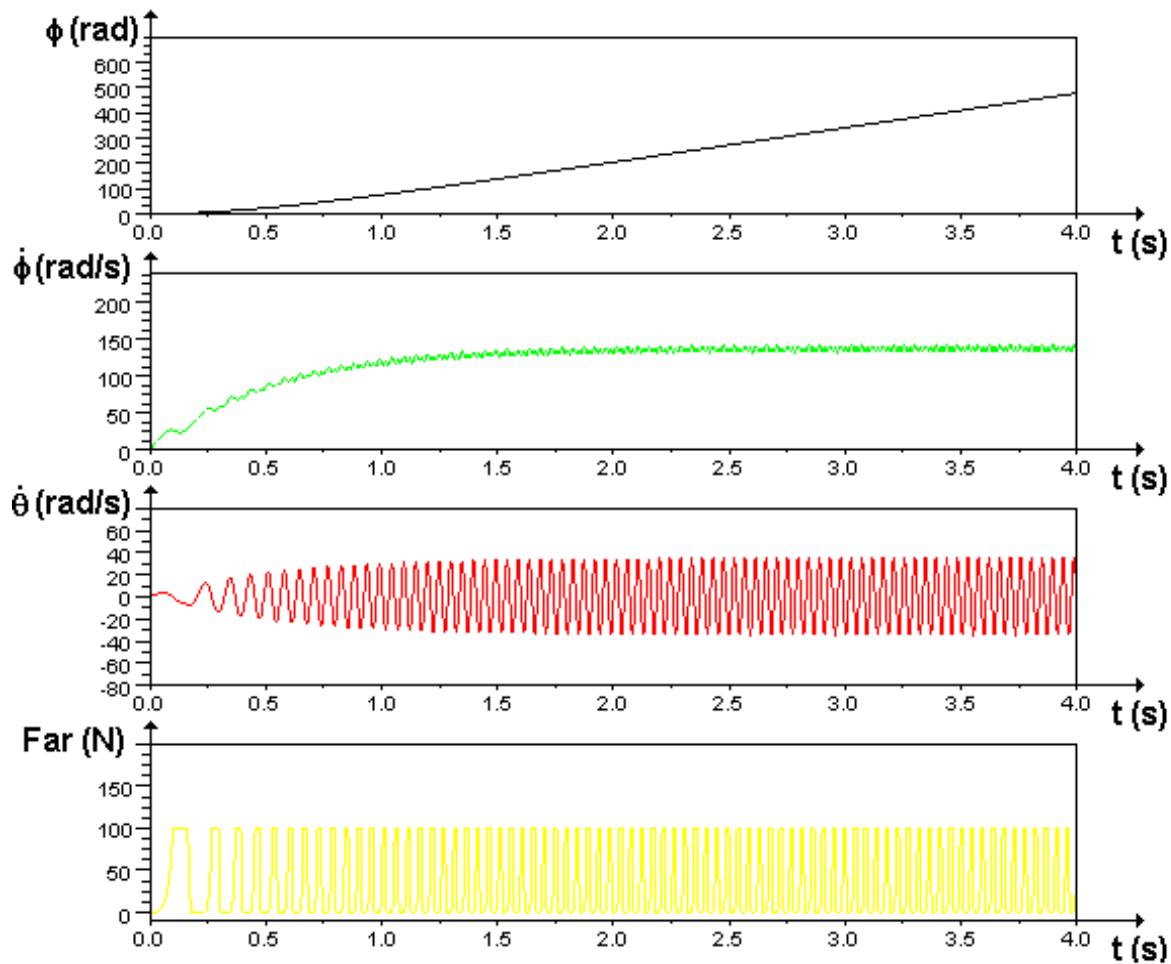


Figura 26: Simulação do Sistema 2

A princípio, a diferença que se pode observar entre no sistema 2 com relação ao sistema 1, é que $\dot{\phi}$ não estabiliza mais em volta de ω , e sim abaixo. Isso ocorre porque agora existem forças resistivas ao movimento, e o sistema estabiliza quando a média dessas forças no tempo compensar o torque médio no tempo.

Outro efeito importante é a dificuldade em que o sistema tem para completar o primeiro ciclo. Isso acontece, porque logo no início o motor precisar fornecer a energia tanto para comprimir o ar da câmara, quanto para acelerar os componentes do sistema. Tal efeito se ameniza a partir do segundo ciclo, justamente porque os componentes já possuem então alguma velocidade. Dessa forma, no regime de operação o motor só precisa fornecer energia para comprimir o ar.

No gráfico da força do ar dá para reparar claramente os estágios de compressão, descarga, expansão e sucção.

Podem-se observar mais claramente os efeitos da força de resistência do ar com os gráficos das figuras 27 e 28:

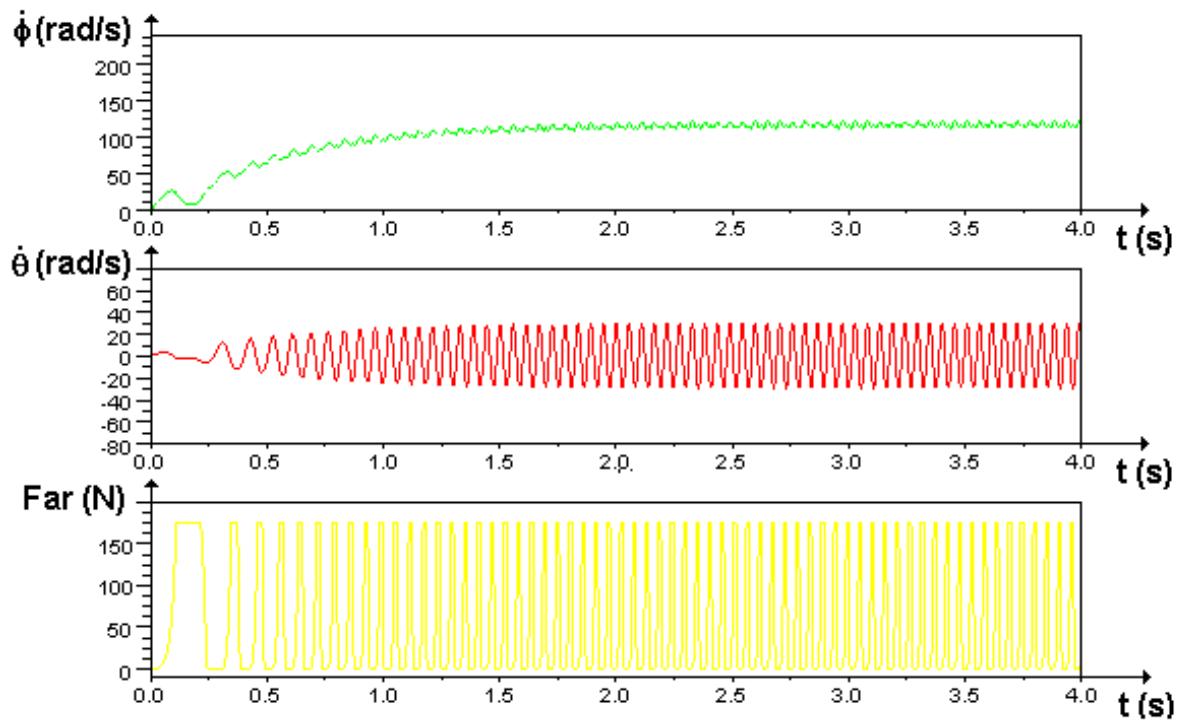


Figura 27: Sistema 2, com $P_{max} = 240\,000 \text{ N/m}^2$

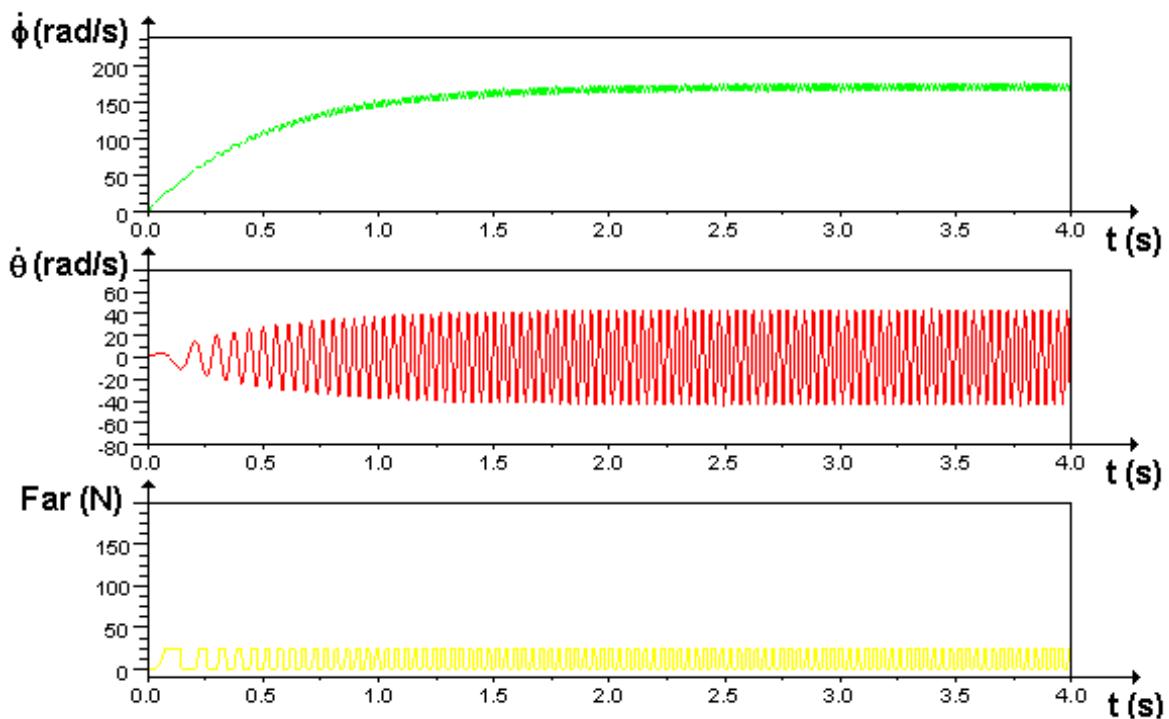


Figura 28: Sistema 2, com $P_{max} = 190\,000 \text{ N/m}^2$

Percebe-se que quando P_{max} foi aumentada a velocidade de regime foi diminuída e os efeitos sobre o primeiro ciclo amplificados. Isso ocorre porque agora a câmara comprime o ar a pressões mais altas e consequentemente maior a força resistente do ar. O oposto ocorre quando P_{max} é diminuída.

Os efeitos da mudança do diâmetro do pistão são similares como pode ser observado nas figuras 29 e 30. Isso se dá pois o pistão está diretamente relacionado com a quantidade de ar comprimida, e consequentemente com a força resistiva do ar.

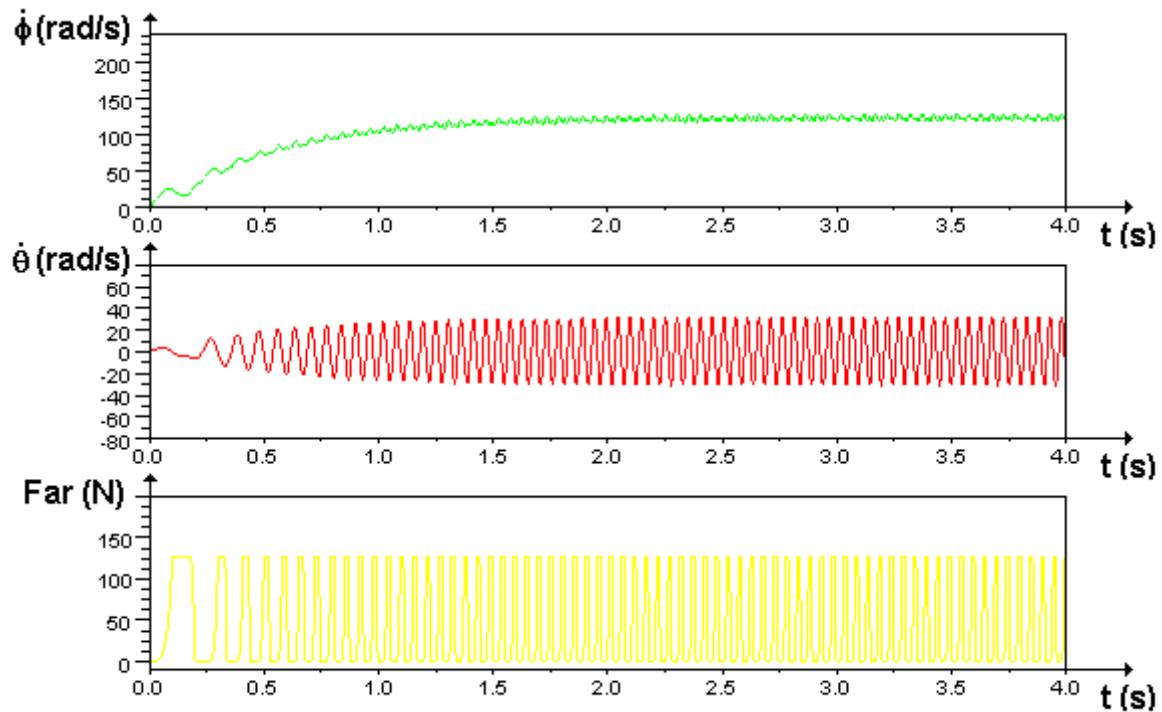


Figura 29: Sistema 2, com $D = 0,045\text{m}$

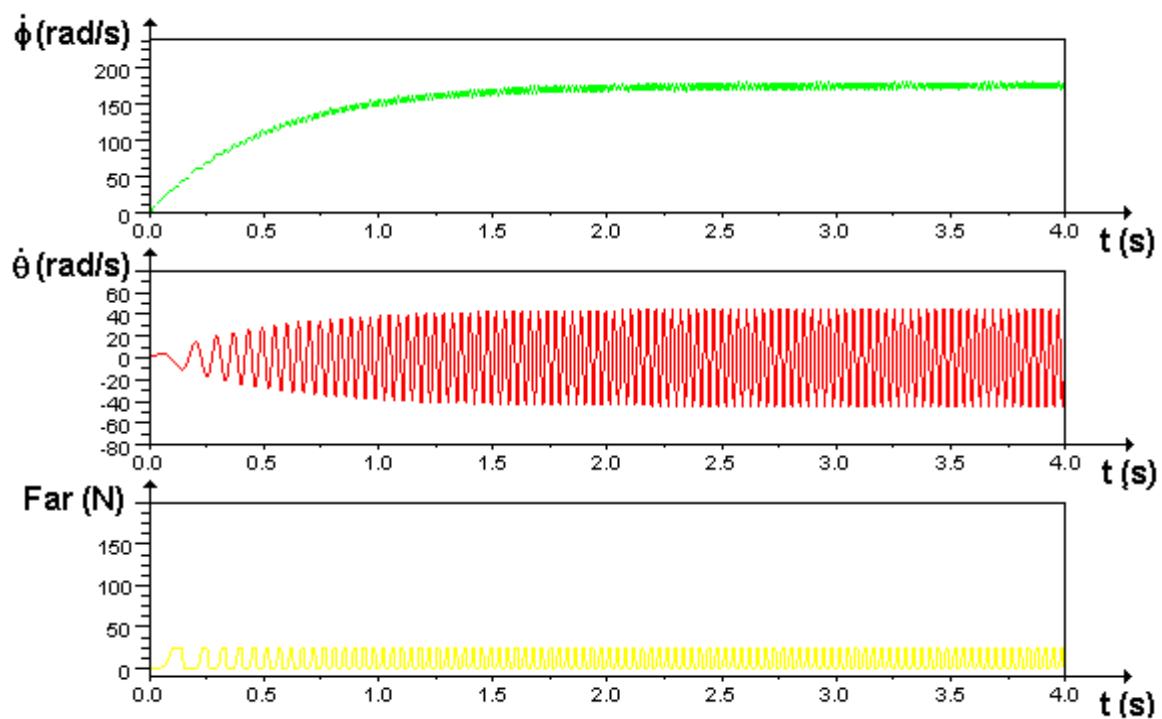


Figura 30: Sistema 2, com $D = 0,02\text{m}$

Há uma diferença, porém: quando se altera P_{max} a pressão chegará a valores de pico diferentes e ficará portanto somente uma partes do ciclo a pressões diferentes, e consequentemente forças do ar diferentes; já a alteração no diâmetro não altera a pressão, altera somente a área que tal pressão atua, e consequentemente a força resistiva do ar, em todos os instantes.

4.3. Simulações do Sistema 3

No sistema 3, foram utilizados todos os parâmetros do sistema 2, mais os seguintes parâmetros:

$$M_b = 2 \text{ kg} ; J_b = 0,005 \text{ kg m}^2 ; a = 0,05 \text{ m}$$

Os gráficos obtidos são dados na figura 31:

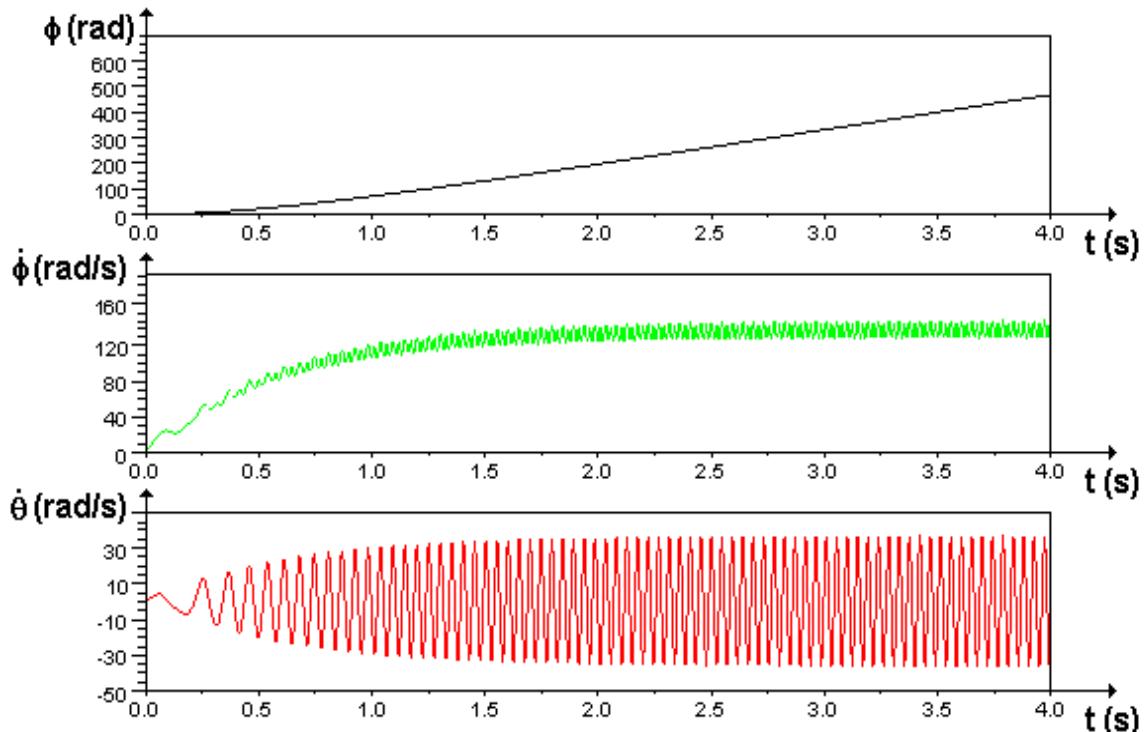


Figura 31: Simulação do Sistema 3

Do gráfico fica claro que a oscilação da velocidade do volante aumentou. Os efeitos sobre a oscilação de $\dot{\phi}$ são agora, porém, não tão claros. Percebe-se que nos instantes em que as velocidades de translação do pistão e da biela são elevadas, a velocidade de rotação da biela é pequena e vice-versa. Dessa forma, a rotação da biela tende a compensar as oscilações de energia cinética das velocidades translacionais da biela e do pistão.

Aumentando a massa da biela, como visto na figura 32, repare que a oscilação de $\dot{\phi}$ aumenta, mas já aumentando o momento de inércia da biela, a oscilação de $\dot{\phi}$ cai, inicialmente (figura 33). Com um novo aumento do momento de inércia da biela, a oscilação de $\dot{\phi}$ volta a

crescer (figura 34):

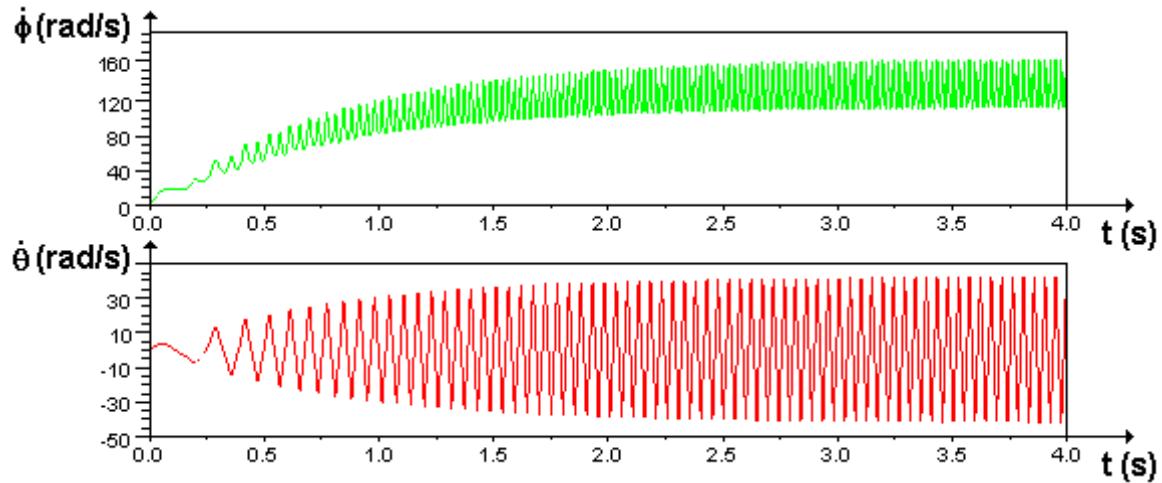


Figura 32: Sistema 3, com $M_b = 10 \text{ kg}$

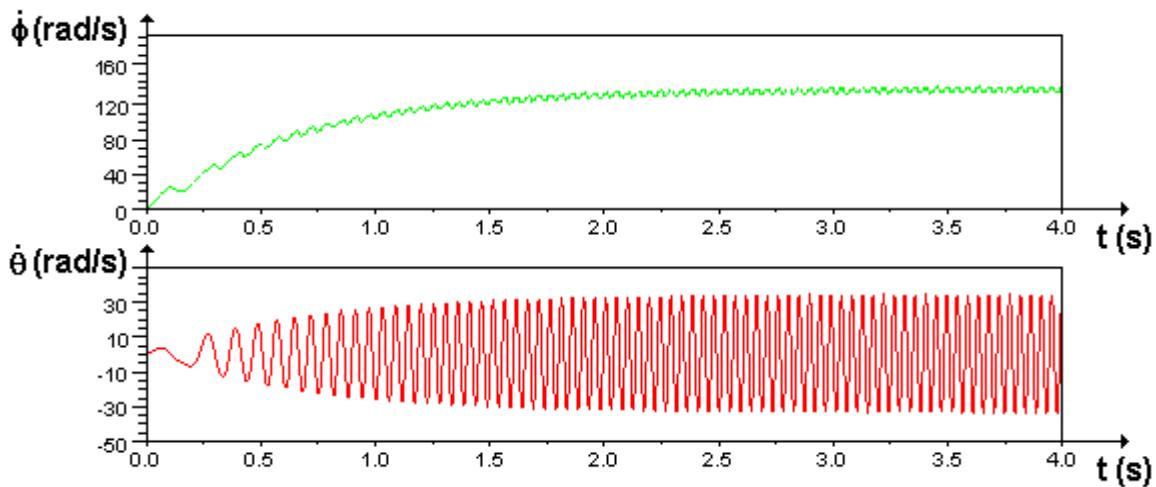


Figura 33: Sistema 3, com $J_b = 0,03 \text{ kg m}^2$

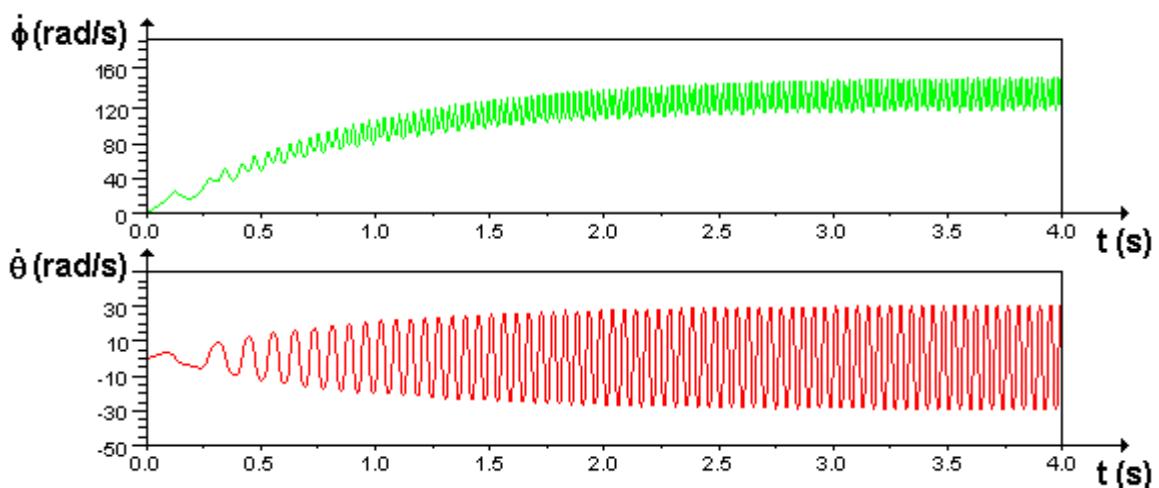


Figura 34: Sistema 3, com $J_b = 0,1 \text{ kg m}^2$

A razão disso é simples: inicialmente, na figura 31 $\dot{\phi}$, oscilava para compensar as

velocidades translacionais da biela e do pistão. Com o aumento da massa da biela, na figura 32, a oscilação de $\dot{\phi}$ aumentaram para compensar o aumento de energia oscilante pela adição de massa na biela. Já o primeiro aumento do momento de inércia da biela, na figura 33, ajuda o volante a compensar as energias cinéticas das velocidades translacionais da biela e do pistão, e assim a oscilação de $\dot{\phi}$ já não é tão grande. E por fim, na figura 34, o momento de inércia da biela já é tão grande, que não só compensa sozinho as velocidades translacionais da biela e do pistão, como sobra energia, que precisa agora ser compensada pelo volante.

Como já foi explicado na simulação do Sistem 1, o aumento do momento de inércia e massa da biela causam também um retardamento na estabilização do sistema. Por motivos análogos a influência de J_b M_b é menos forte sobre o tempo de estabilização do que sobre a oscilação de $\dot{\phi}$.

4.4. Simulações do Sistema 4

Para a simulação do sistema 4 foram usados os mesmos parâmetros do sistema 4 e adicionalmente o parâmetro $k = 1,4$. Os gráficos resultantes são mostrados na figura 35:

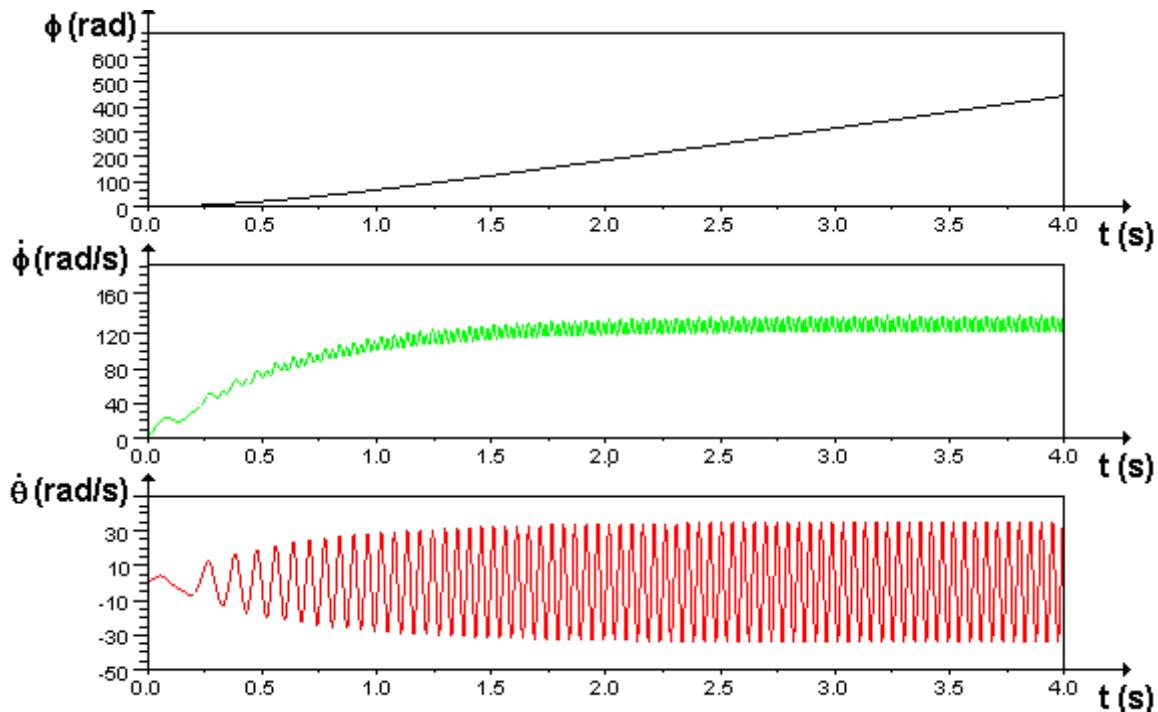


Figura 35: Simulação do sistema 4 com $k = 1,4$

A princípio talvez o leitor não consiga indentificar nenhuma variação para a simulação do sistema 3, pelo fato de a força externa do ar ter se alterado apenas ligeiramente. Porém, as figuras

36 e 37, uma simulação do sistema 3 e do sistema 4 em um intervalo menor (apenas 1 segundo), deixa mais claro as diferenças existentes.

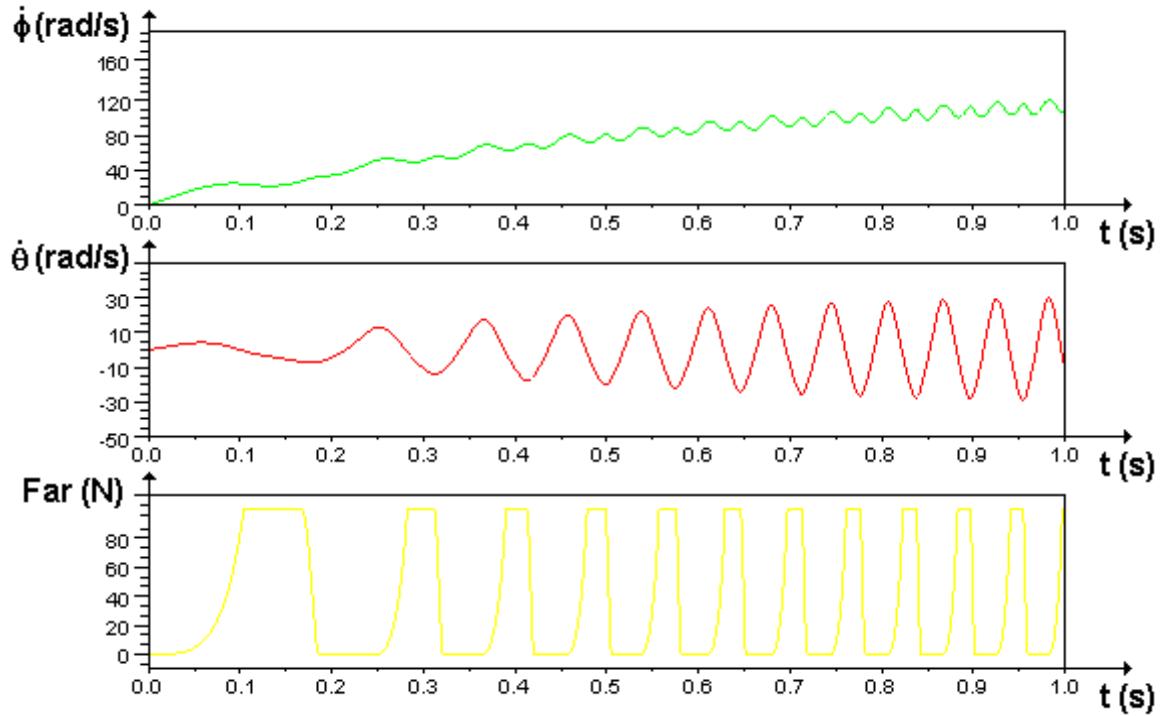


Figura 36: Simulação de 1 segundo do sistema 3 (com os parâmetros antes fornecidos)

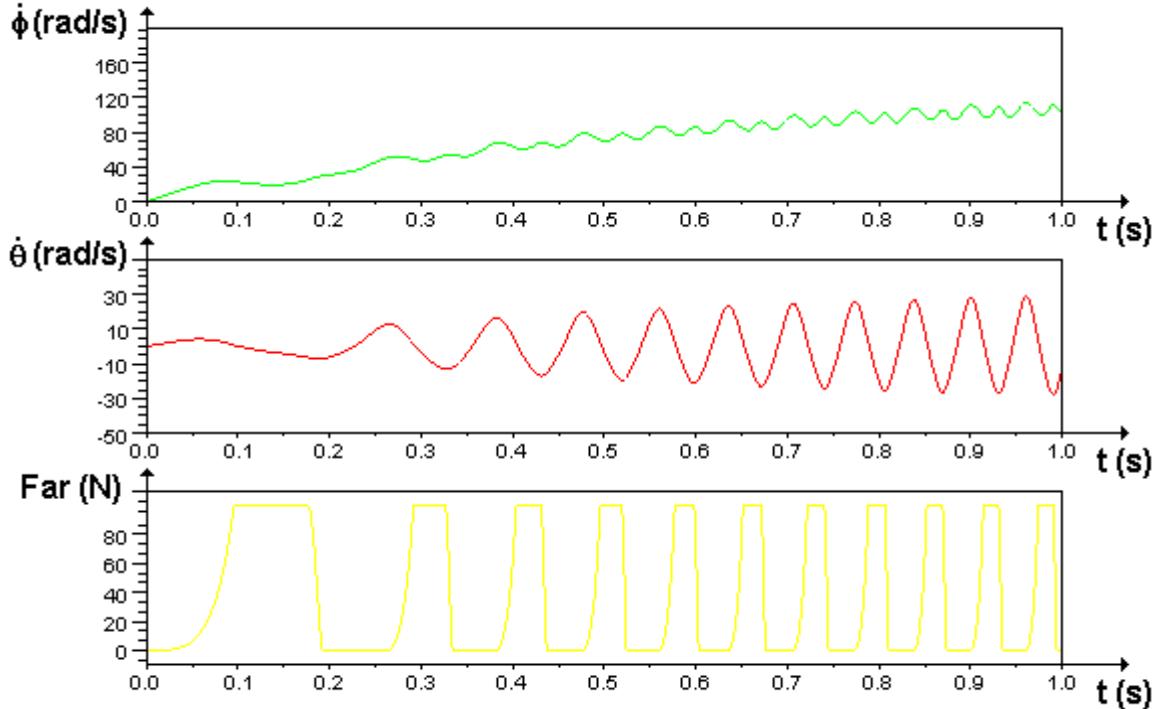


Figura 37: Simulação de 1 segundo do sistema 4 (com os parâmetros antes fornecidos)

Percebe-se das duas figuras que, no período de simulação, enquanto o sistema 3 percorreu

11 ciclos completos e já começou o 12º ciclo, o sistema 4 está ainda no final do 11º ciclo. Isso é evidente, posto que o trabalho necessário para realizar um ciclo do compressor isotérmico é menor que o trabalho necessário para realizar um ciclo de um compressor adiabático.

4.5. Simulações do Sistema 5

A simulação inicial do sistema 5 foi feito com os seguintes parâmetros:

$$J_v = 0,0025 \text{ kg m}^2; T_o = 2\text{N m}; \omega = 188,5 \text{ rad/s}; M_p = 1\text{kg}; e = 0,025 \text{ m}; l = 0,1 \text{ m}; a = 0,05\text{m}; M_b = 1 \text{ kg};$$

$$J_b = 0,005 \text{ kg m}^2; M_v = 1 \text{ kg}; b = 0,0125 \text{ m}; \mu = 001 \text{ Pa}\cdot\text{s}; R = 0,0635\text{m}; L = 0,0381\text{m}; c = 0,00009\text{m}$$

Os resultados obtidos podem ser observados nas figuras 38, 39, 40 e 41.

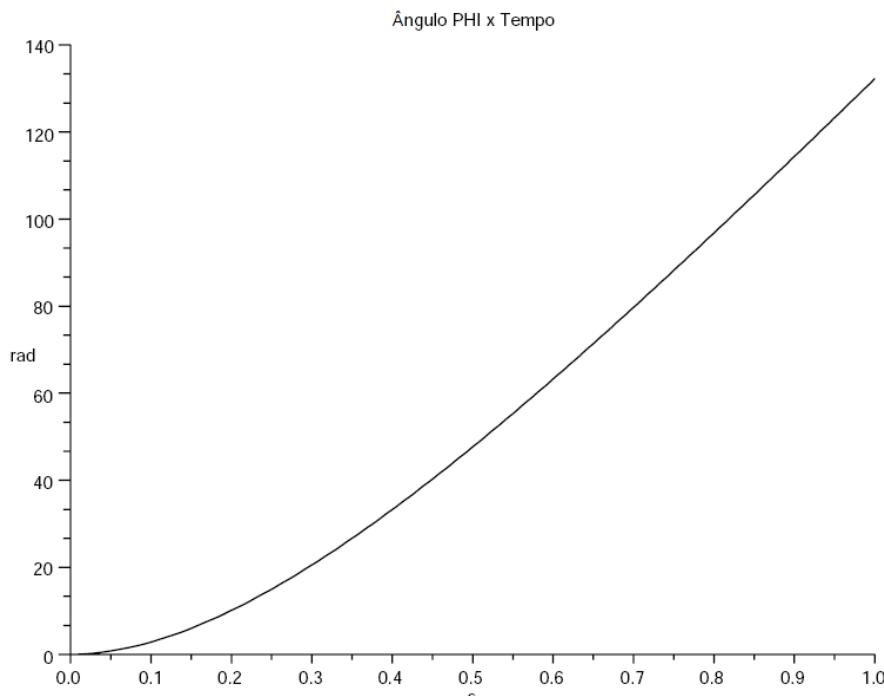


Figura 38: Ângulo do volante com relação ao tempo

Como era esperado, a curva do ângulo e da velocidade angular do volante do pistão reagiu de maneira similar às simulações anteriores, pois a excentricidade do centro de rotação do volante pouco efeito produz sobre a energia do resto do sistema (pistão, biela e volante ou manivel). Porém, agora podem ser observados pelas figuras 40 e 41 a excentricidade e a órbita apresentada pelo centro de rotação do volante.

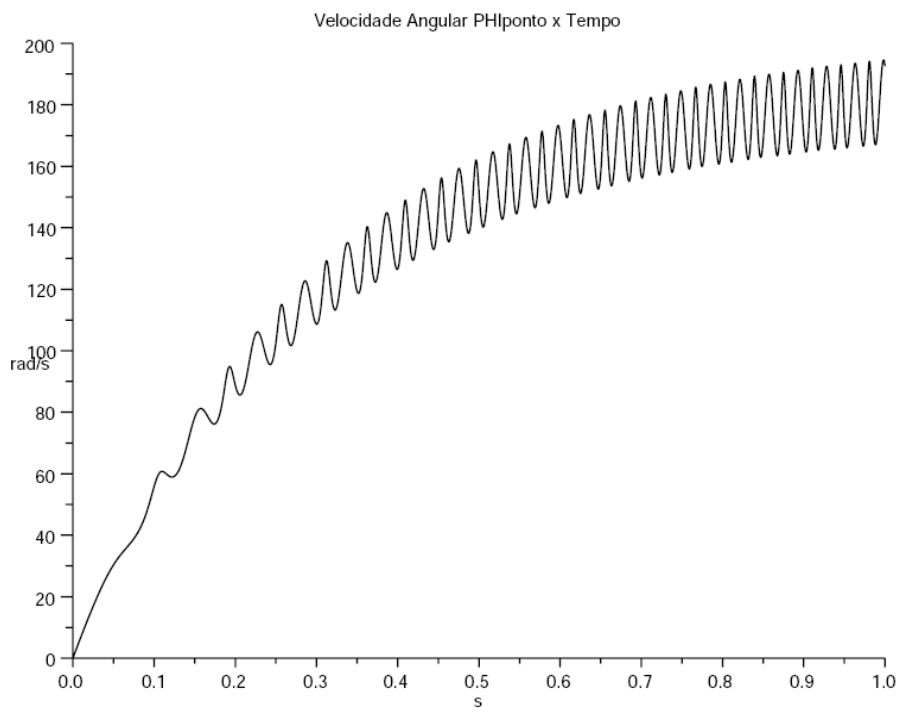


Figura 39: Velocidade angular do volante com relação ao tempo

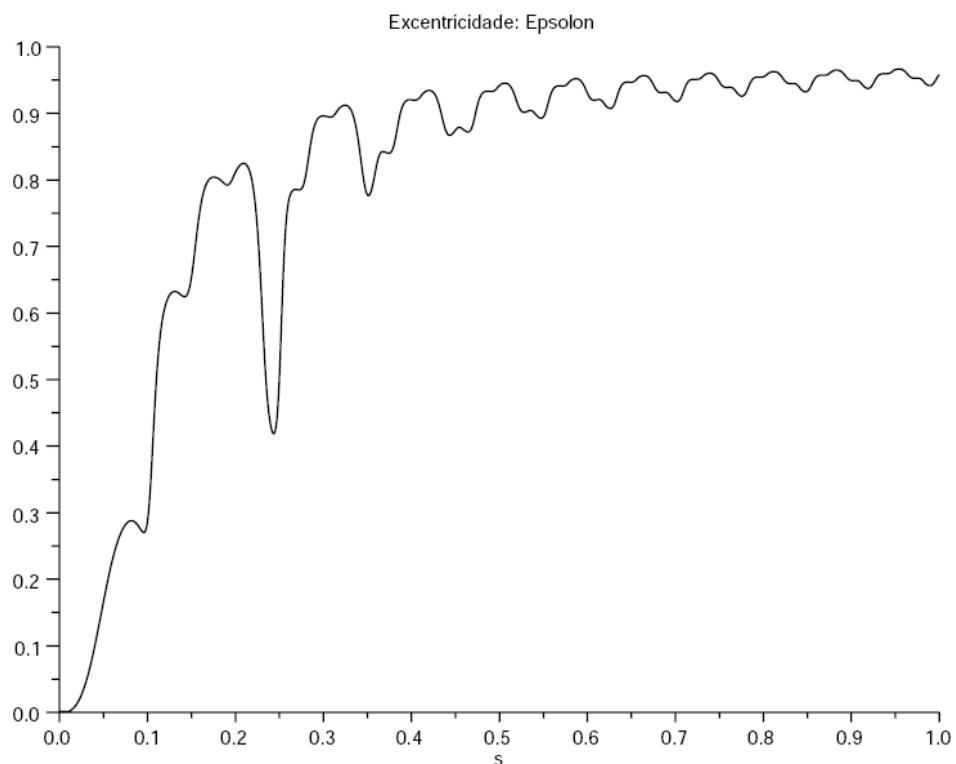


Figura 40: Excentricidade do centro de rotação volante

A excentricidade pela qual o volante passa começa em 0, pois inicialmente ele se encontra

na origem. Com o decorrer da simulação, ele começa a ser empurrado para fora, tanto pelo desbalanceamento da manivela (por não possuir o centro de massa no centro de rotação), como pela força que deve aplicar para a biela e o pistão exercerem seus movimentos. As forças do mancal agem então no volante de modo a reposicionar o centro de rotação do volante à origem. Depois de algum tempo as forças do mancal e as forças de desbalanceamento do volante levam a excentricidade a um valor praticamente estável, com pequenas oscilações. Nesse ponto, a órbita do centro de rotação do volante fica próxima a uma circunferência, que pode ser observada na figura 41 (onde a linha da órbita fica mais escura).

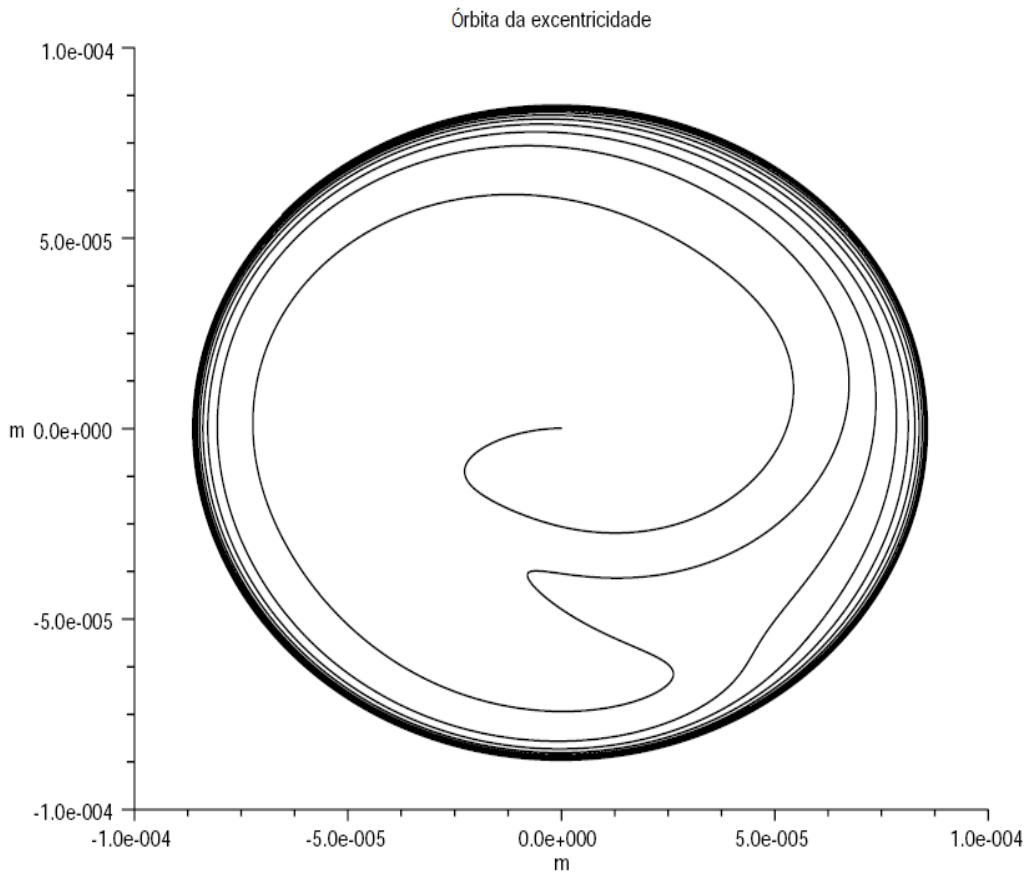


Figura 41: Órbita da posição do centro de rotação do volante

4.6. Simulações do Sistema 6

Para a simulação do sistema 6 foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
 J_v &= 0,0025 \text{ kg m}^2; J_b &= 0,005 \text{ kg m}^2; M_p &= 1 \text{ kg}; M_b &= 1 \text{ kg}; M_v &= 1 \text{ kg}; e &= 0,025 \text{ m}; l &= 0,1 \text{ m}; a &= 0,05 \text{ m}; \\
 b &= 0,0125 \text{ m}; T_o &= 2 \text{ N m}; \omega &= 188,5 \text{ rad/s}; \mu &= 0,001 \text{ Pa s}; R1 &= R2 = R3 &= 0,0635 \text{ m}; L1 &= L2 = L3 &= 0,0381 \text{ m}; \\
 c1 &= c2 = c3 &= 0,00009 \text{ m}; PMAX &= 180,000 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

Esses parâmetros são os mesmos do sistema 5, com a adição de parâmetros dos mancais hidrodinâmicos 2 e 3, para direta comparação com tal sistema. As figuras 42, 43, 44, 45, 46, 47 e 48

mostram o resultado da simulação do sistema 6.

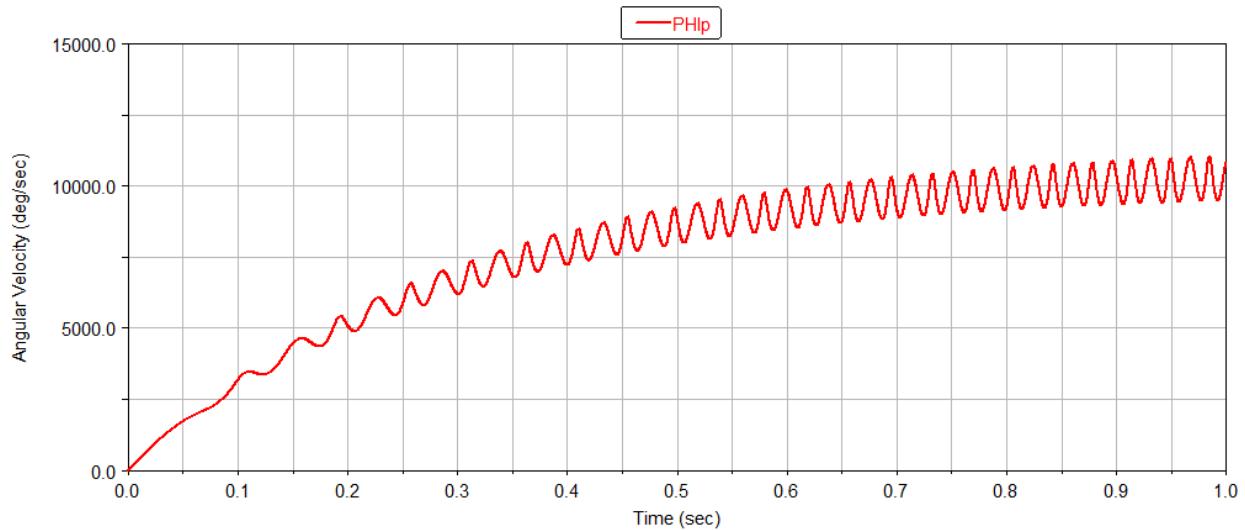


Figura 42: Velocidade Angular do volante em relação ao tempo

Percebe-se que o volante comporta-se exatamente igual para o sistema 5 e para o sistema 6.

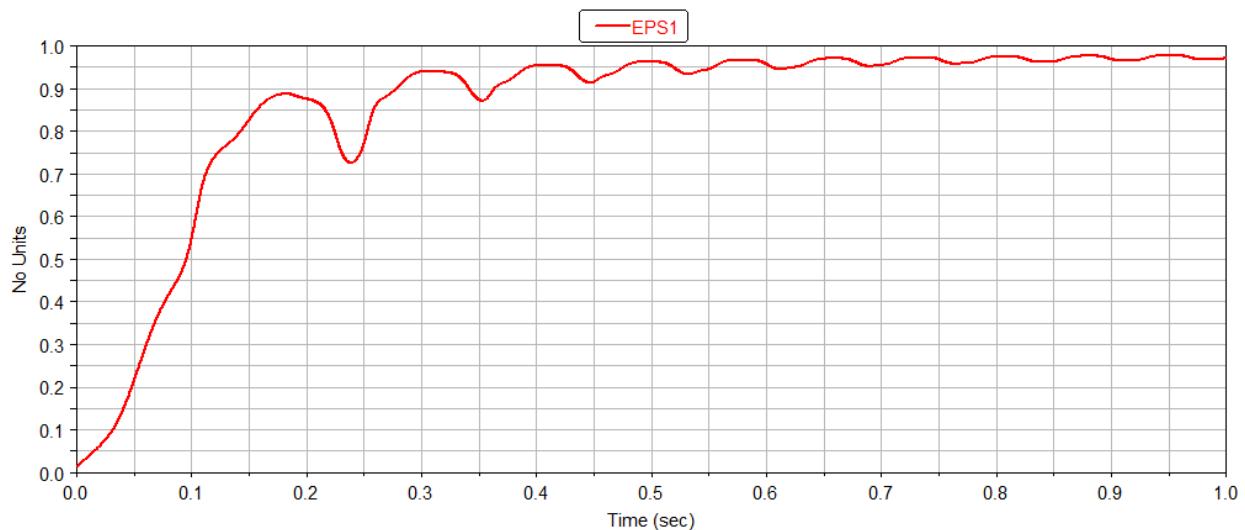


Figura 43: Excentricidade do Contato Mancal/Volante

A excentricidade do contato mancal/volante se comporta ligeiramente diferente no início da simulação, convergindo para os mesmos valores no regime permanente. Tais diferenças se devem aos métodos numéricos usados por cada software.

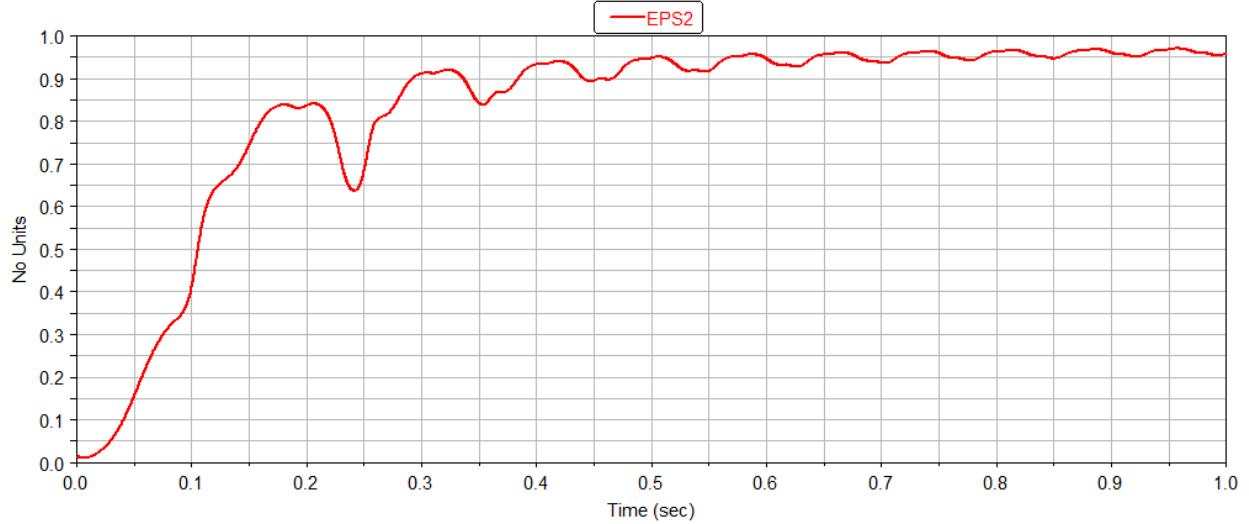


Figura 44: Excentricidade do Contato Volante/Bielas

A excentricidade do contato volante/bielas é muito similar à excentricidade do contato mancal/volante. Isso pode ser explicado, porque a rotação em ambos é muito parecida, e perto de $\dot{\phi}$.

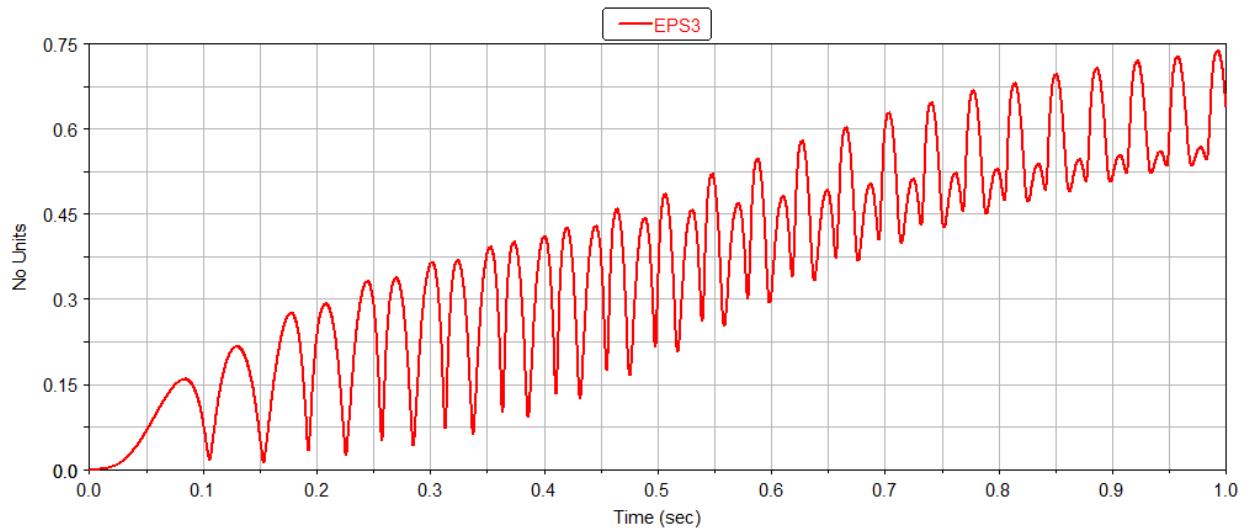


Figura 45: Excentricidade do Contato Biela/Pistão

Já a excentricidade do contato biela/pistão mostra uma grande amplitude inclusive no regime permanente. No gráfico de órbita dá para se enxergar melhor os efeitos aí presentes.

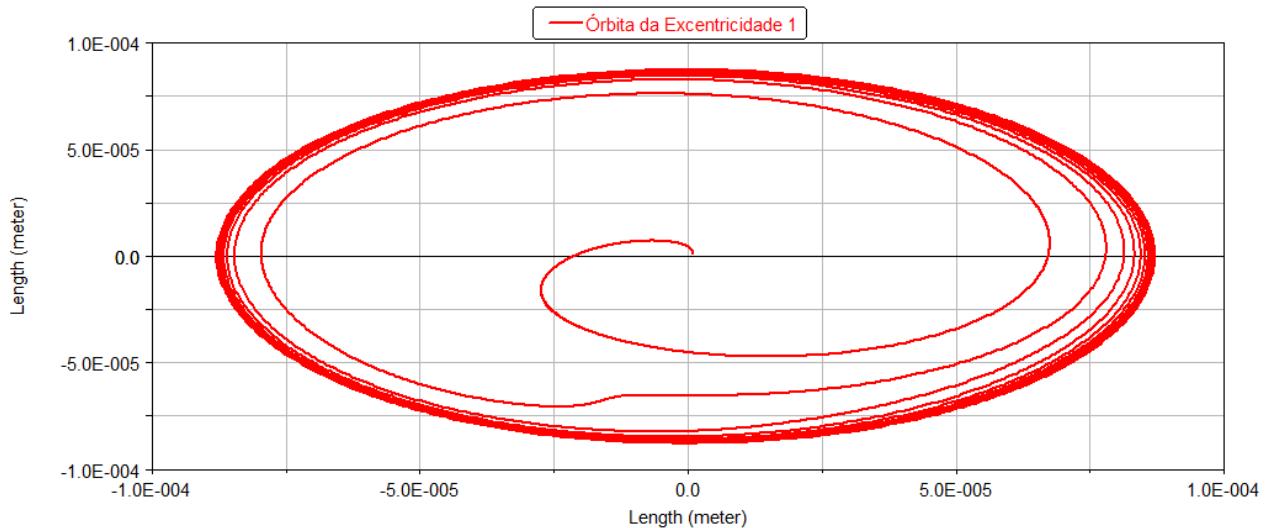


Figura 46: Órbita da Excentricidade do Contato Mancal/Volante

Novamente percebe-se os efeitos similares no regime permanente, e as pequenas diferenças no início da operação.

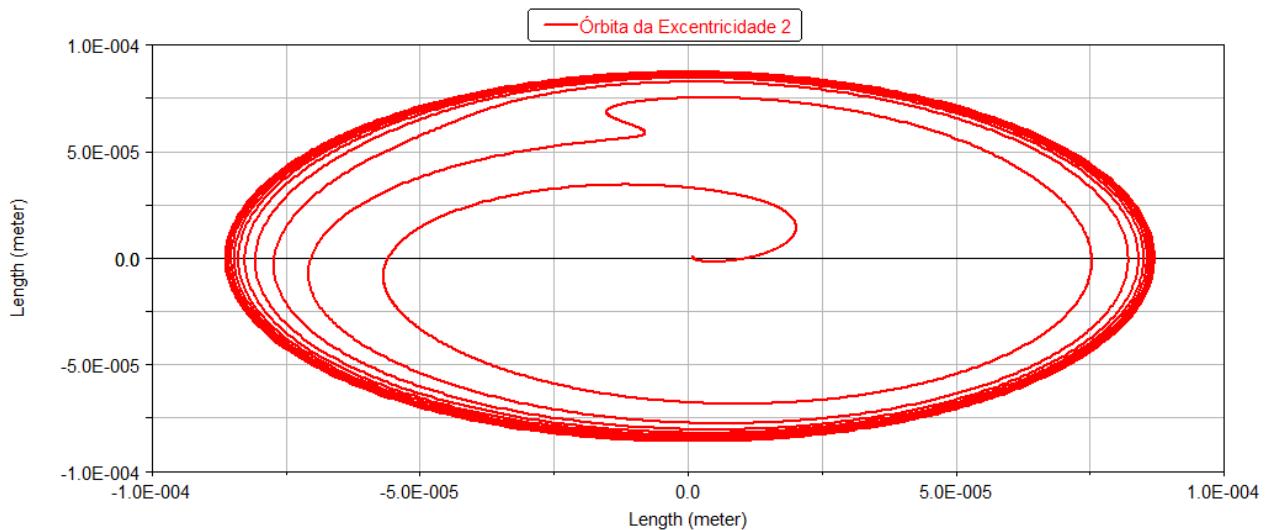


Figura 47: Órbita da Excentricidade do Contato Volante/Bielas

A órbita da excentricidade do contato volante/bielas é também muito parecida com a órbita do da excentricidade do contato mancal/volante.

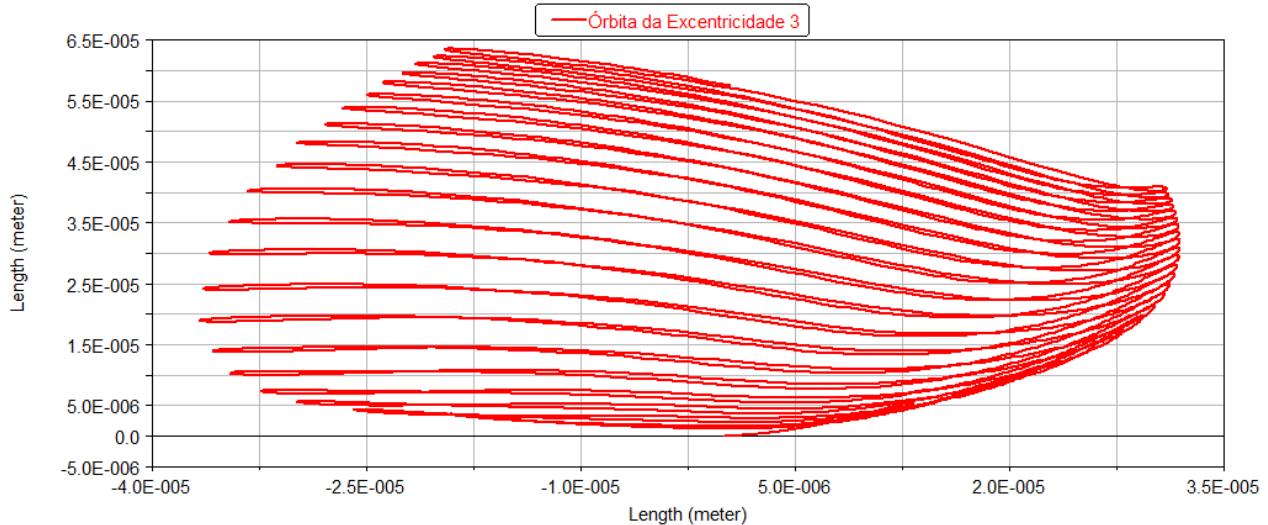


Figura 48: Órbita da Excentricidade do Contato Biela/Pistão

Na Figura 48 dá para se perceber melhor o que ocorre no mancal hidrodinâmico 3. Existe uma grande amplitude em x, justamente pelo fato do pistão estar fixado na direção y, e o seu deslocamento ser totalmente em x. A pequena oscilação em y se deve ao ângulo em que a biela está empurrando o pistão, que será quase o tempo todo não paralelo ao eixo x.

4.7. Simulações do Sistema 7

Para a simulação do sistema 7 foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
 J_v &= 0,0025 \text{ kg m}^2; J_b = 0,005 \text{ kg m}^2; M_p = 1 \text{ kg}; M_b = 1 \text{ kg}; M_v = 1 \text{ kg}; e = 0,025 \text{ m}; l = 0,1 \text{ m}; a = 0,05 \text{ m}; \\
 b &= 0,0125 \text{ m}; \omega = 188,5 \text{ rad/s}; \mu = 001 \text{ Pa} \cdot \text{s}; R1 = R2 = R3 = 0,0635 \text{ m}; L1 = L2 = L3 = 0,0381 \text{ m}; \\
 PMAX &= 180.000 \text{ Pa}; c1 = c2 = c3 = 0,00009 \text{ m},
 \end{aligned}$$

e torque:

$$T = -1,72 \cdot 10^{-14} \cdot \dot{\phi}^6 + 1,35 \cdot 10^{-11} \cdot \dot{\phi}^5 - 3,83 \cdot 10^{-9} \cdot \dot{\phi}^4 + 3,94 \cdot 10^{-7} \cdot \dot{\phi}^3 + 2,47 \cdot 10^{-5} \cdot \dot{\phi}^2 - 6,14 \cdot 10^{-3} \cdot \dot{\phi} + 1,50 .$$

O resultado da substituição de um motor teórico por um real só tem efeitos relevantes no início da operação, porque perto do ponto de operação, a curva do motor se parece com uma reta (ou seja, com o motor que estava sendo usado anteriormente). O efeito em $\dot{\phi}$ pode ser observado na Figura 49. Repare que no regime permanente o comportamento do volante é muito similar, porém a curva apresentada até chegar no regime permanente é bastante diferente:

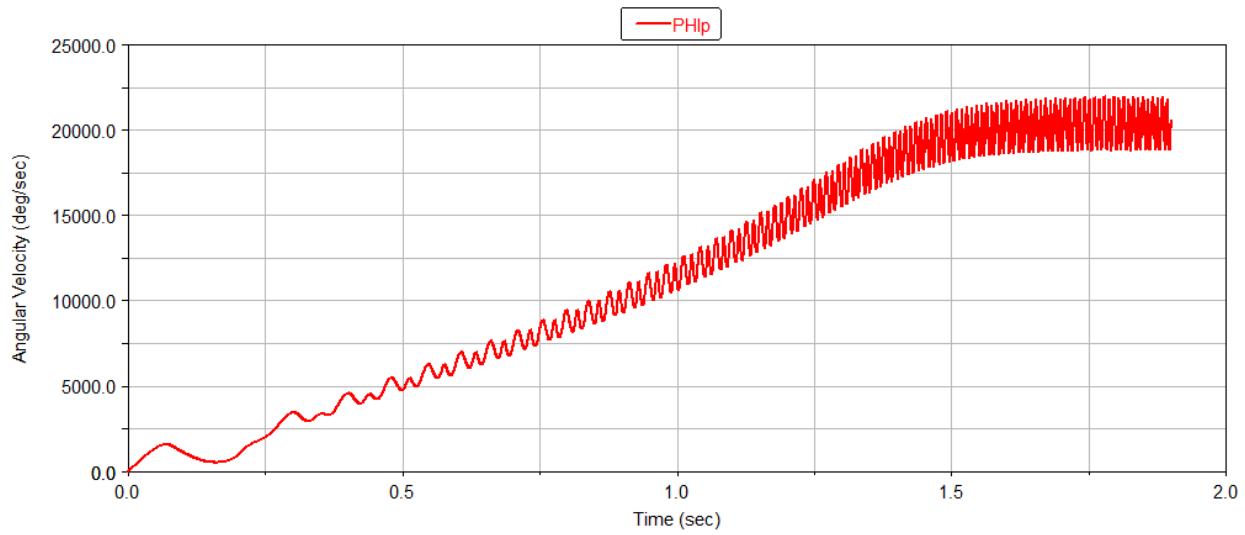


Figura 49: Velocidade angular do volante em relação ao tempo

As excentricidades e órbitas dos mancais 1 e 2 são também bastante parecidas no regime permanente, com algumas diferenças no início da operação, observadas nas figuras 50, 51, 53 e 52:

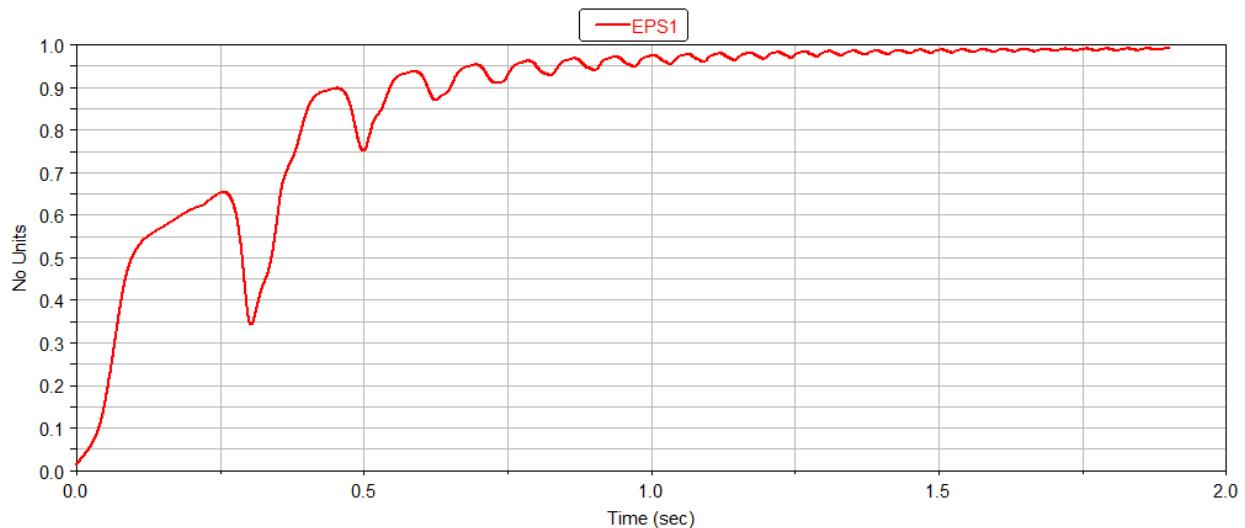


Figura 50: Excentricidade do Contato Mancal/Volante

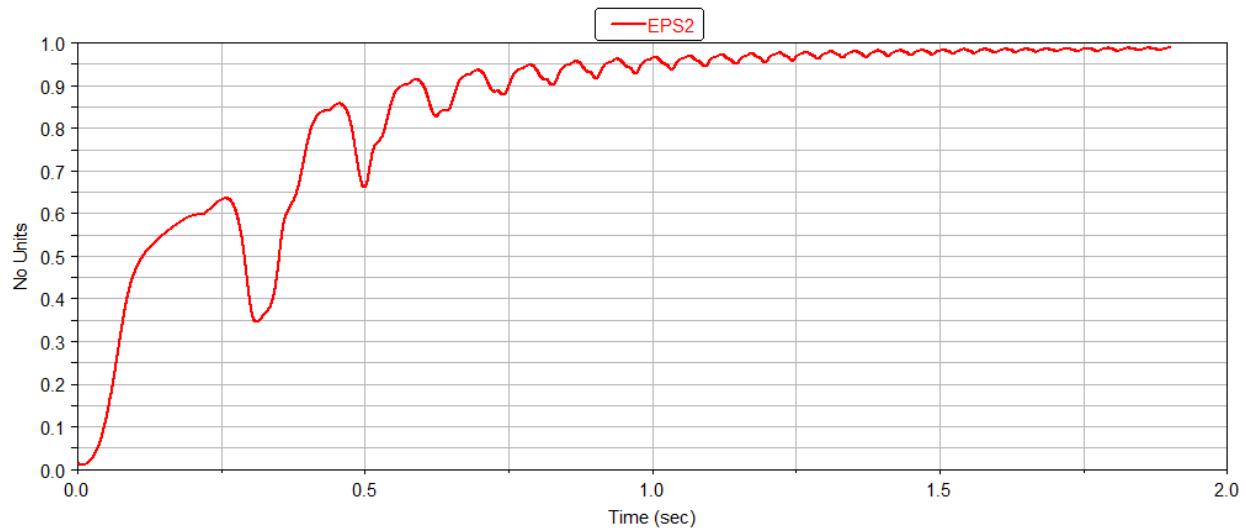


Figura 51: Excentricidade do Contato Volante/Bielas

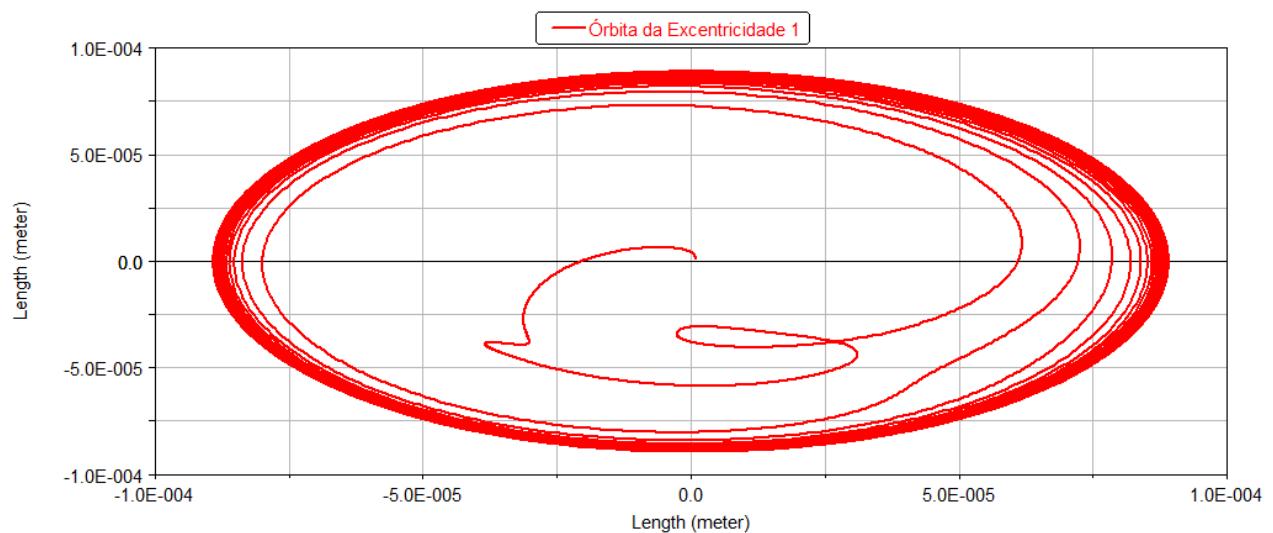


Figura 52: Órbita da Excentricidade do Contato Mancal/Manivela

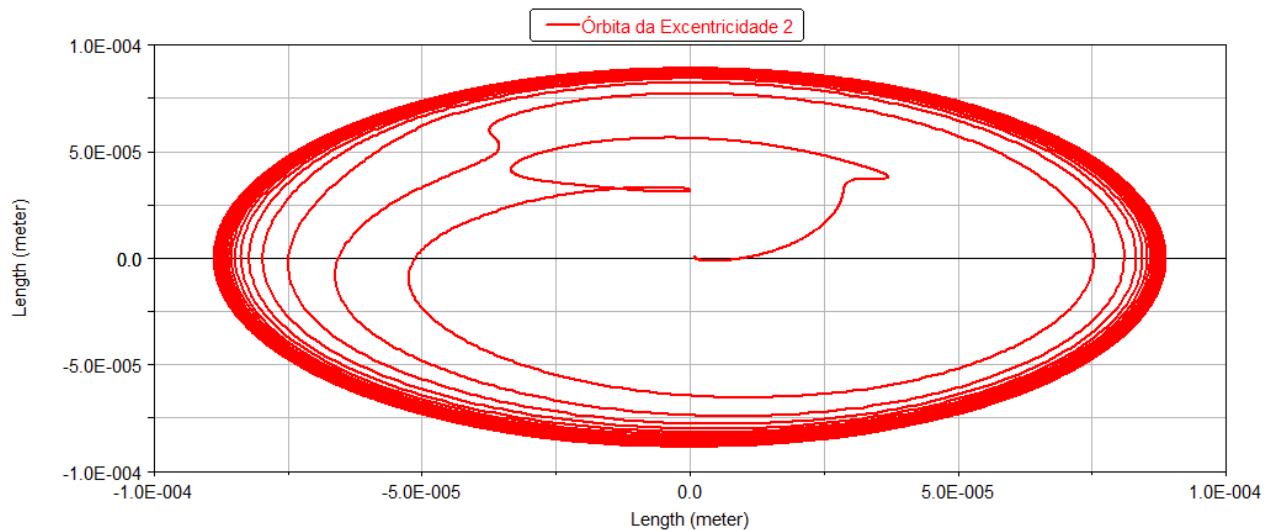


Figura 53: Órbita da Excentricidade do Contato Manivela/Biela

Já o mancal 3 apresenta maiores diferenças, relativas à força de compressão do ar, que volta a estar presente no sistema, podendo ser observadas nas figuras :

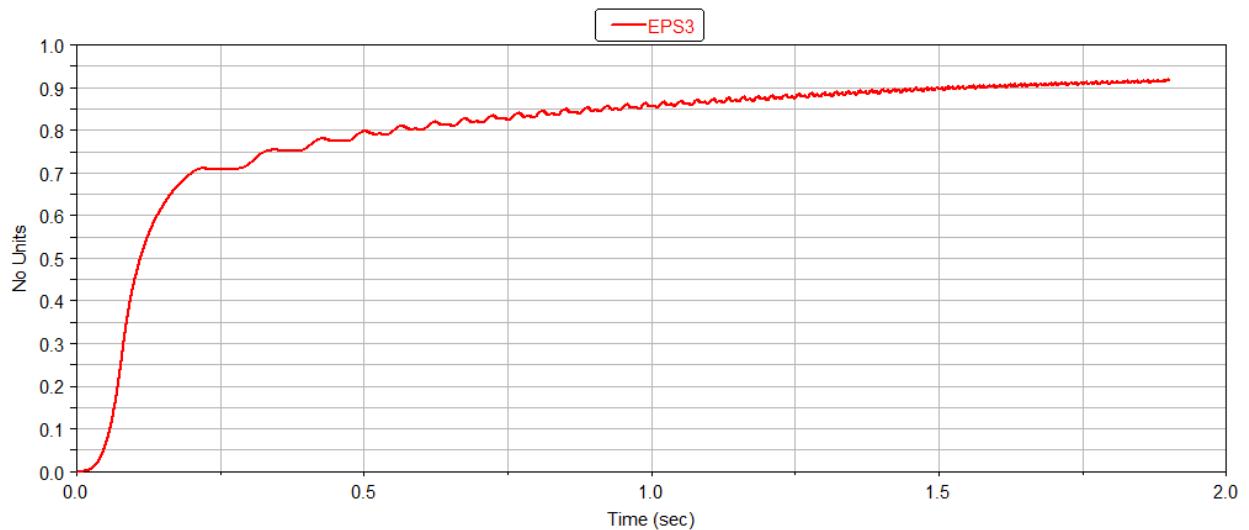


Figura 54: Excentricidade do Contato Biela/Pistão

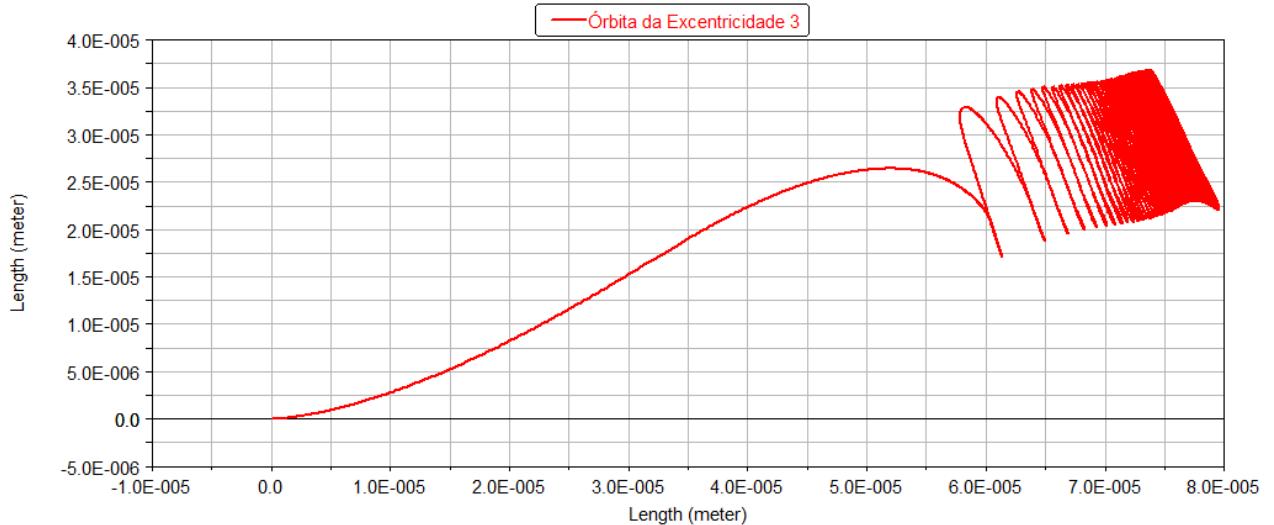


Figura 55: Órbita da Excentricidade do Contato Biela/Pistão

4.8. Simulações do Sistema 8

Para a simulação do sistema 8 foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$J_v = 0,008 \text{ kg m}^2; J_b = 0,0005 \text{ kg m}^2; M_p = 0,1 \text{ kg}; M_b = 0,1 \text{ kg}; M_v = 0,7 \text{ kg}; e = 0,025 \text{ m}; l = 0,1 \text{ m}; \\ a = 0,05 \text{ m}; b = 0,0125 \text{ m}; \mu = 0,1 \text{ Pa s}; R1 = R2 = R3 = 0,005 \text{ m}; L1 = L2 = L3 = 0,01 \text{ m}; \\ PMAX = 300.000 \text{ Pa}; c1 = c2 = c3 = 0,000045 \text{ m},$$

e torque:

$$T = 5 \cdot (-1,72 \cdot 10^{-14} \cdot \dot{\phi}^6 + 1,35 \cdot 10^{-11} \cdot \dot{\phi}^5 - 3,83 \cdot 10^{-9} \cdot \dot{\phi}^4 + 3,94 \cdot 10^{-7} \cdot \dot{\phi}^3 + 2,47 \cdot 10^{-5} \cdot \dot{\phi}^2 - 6,14 \cdot 10^{-3} \cdot \dot{\phi} + 1,50) .$$

O resultado observado foi:

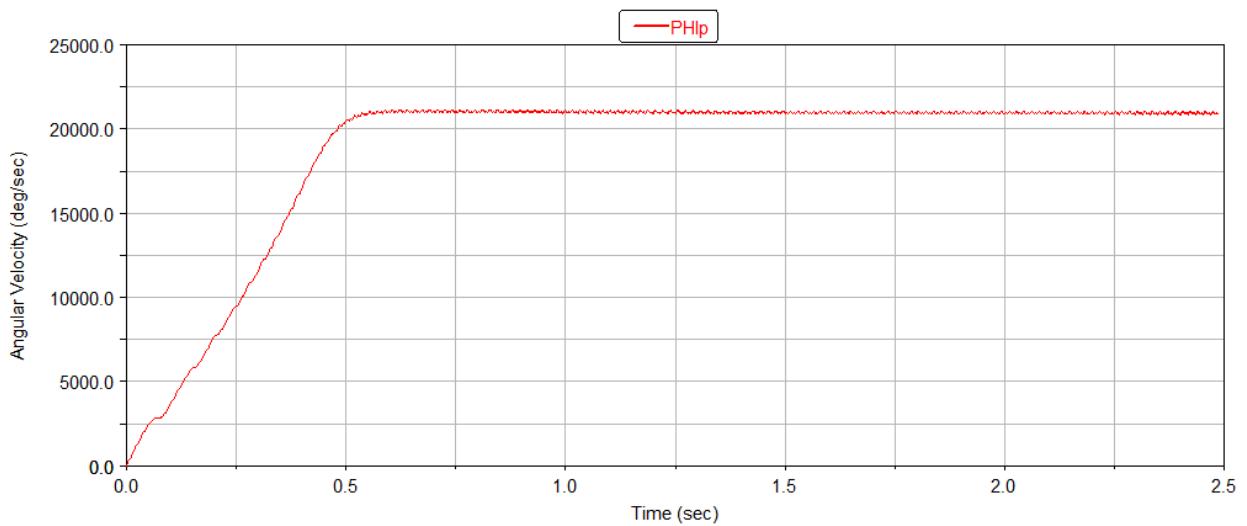


Figura 56: Velocidade angular do volante

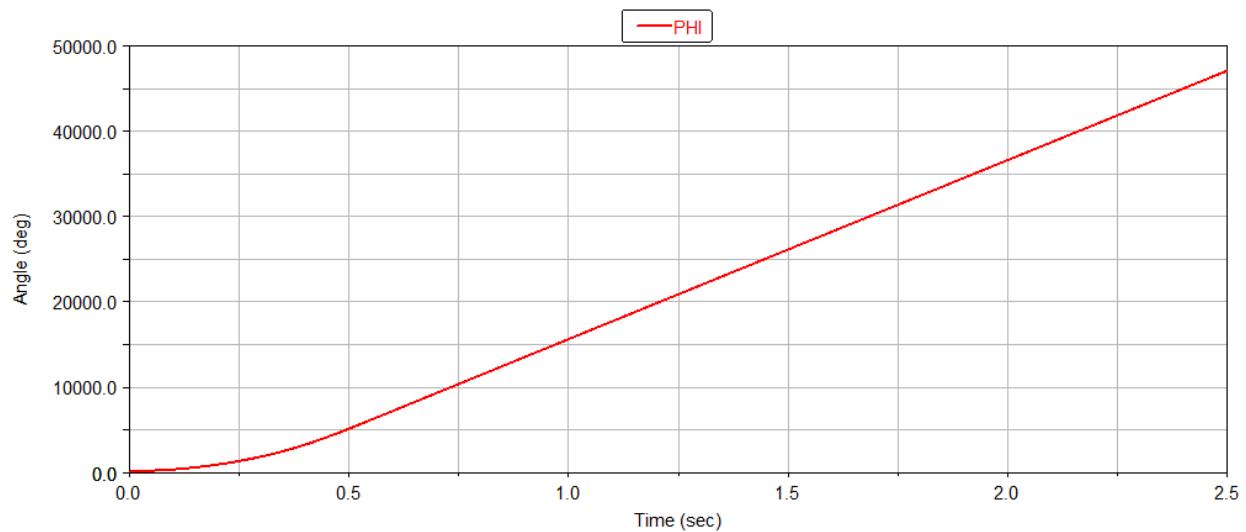


Figura 57: Ângulo de rotação do volante

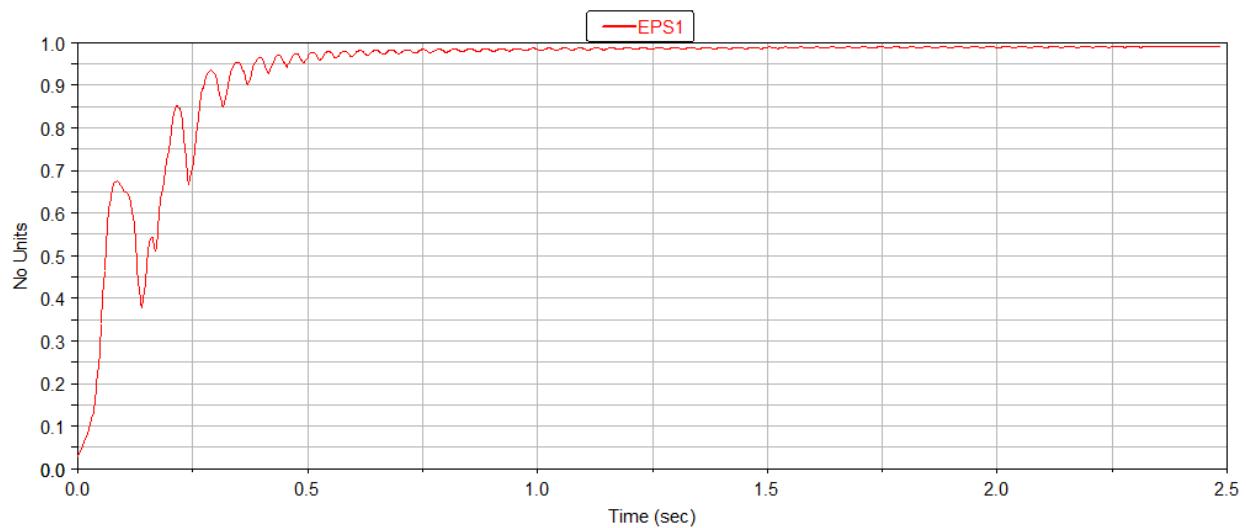


Figura 58: Excentricidade do contato Mancal/Volante

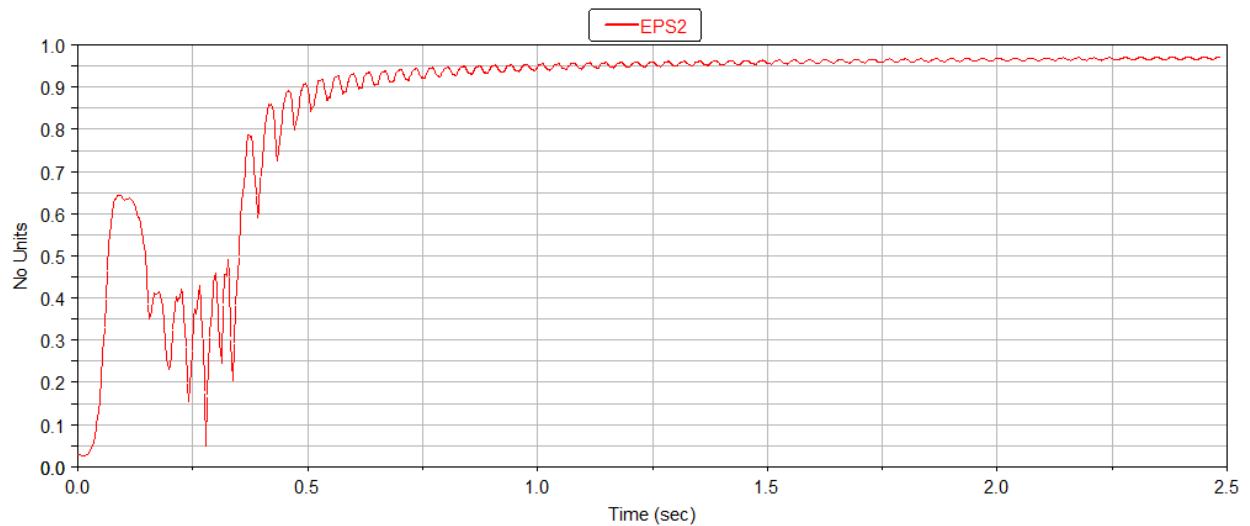


Figura 59: Excentricidade do contato Volante/Bielas

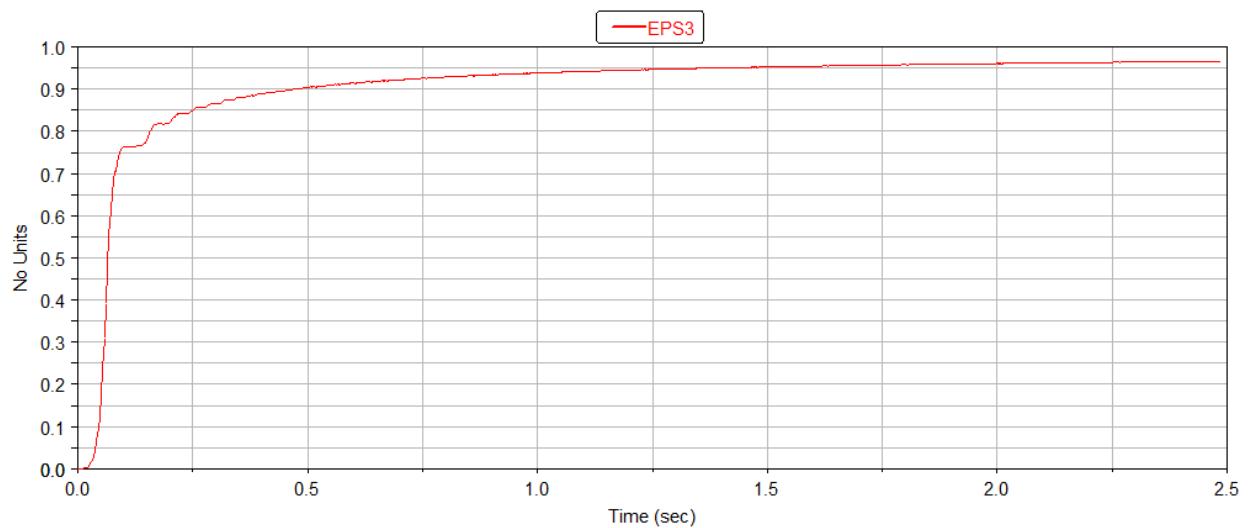


Figura 60: Excentricidade do contato Biela/Pistão

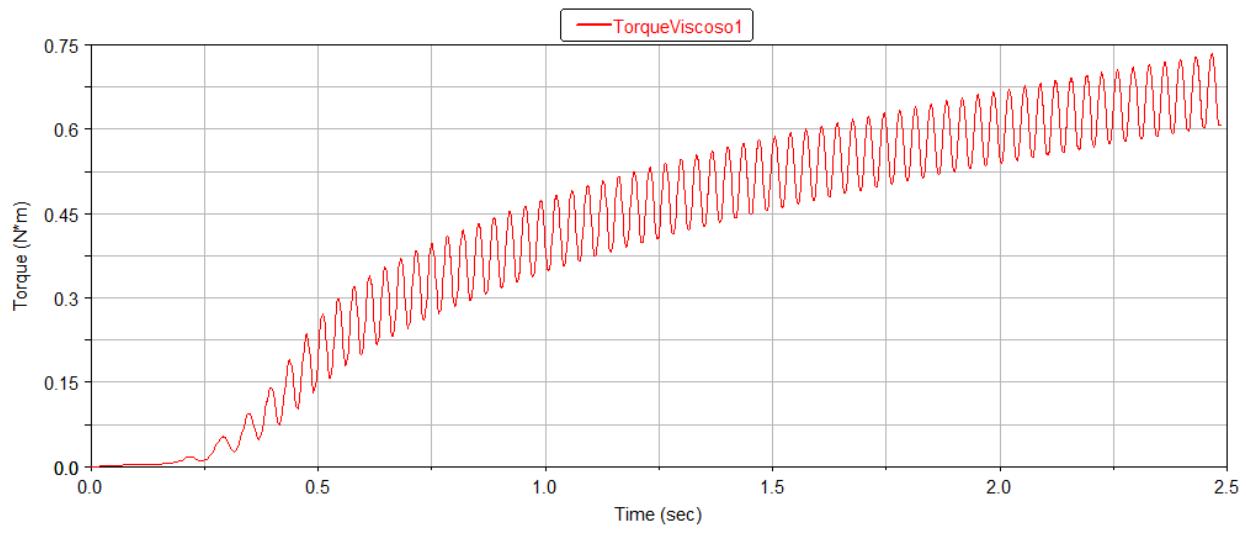


Figura 61: Torque viscoso do contato Mancal/Volante

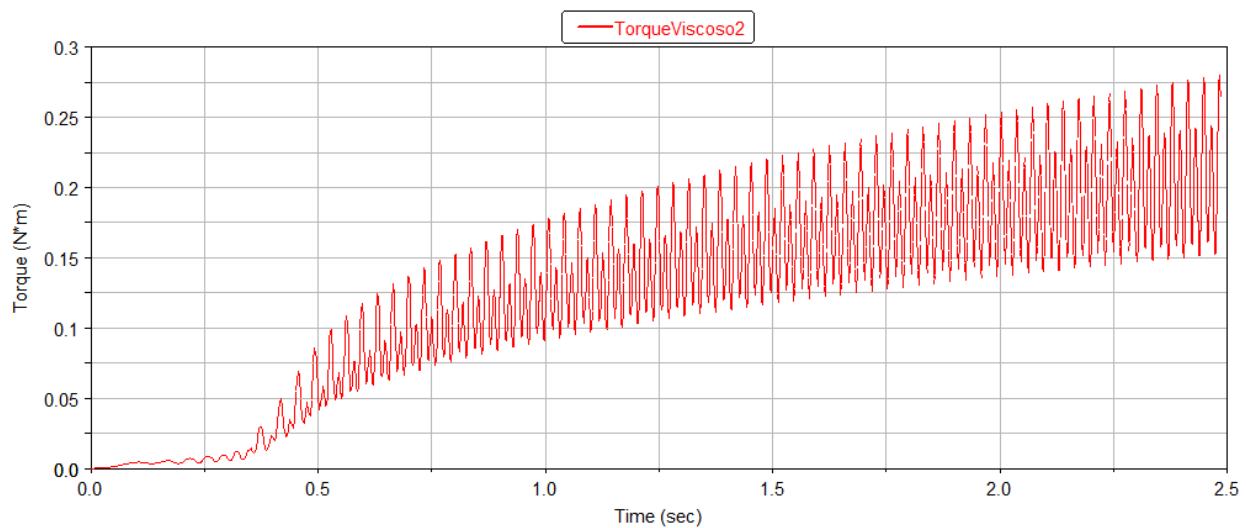


Figura 62: Torque Viscoso do contato Volante/Bielas

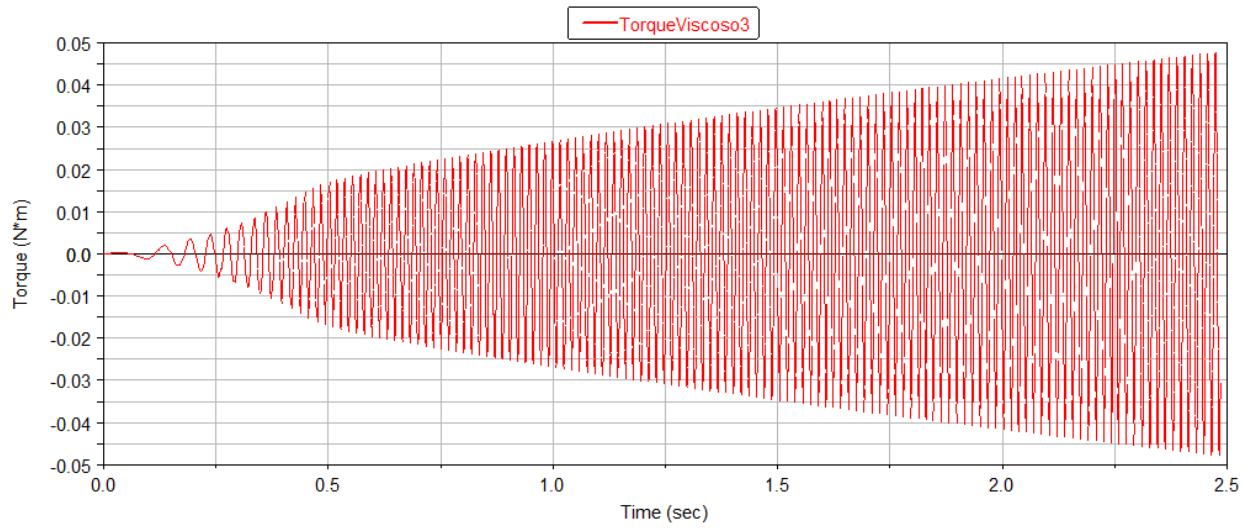


Figura 63: Torque viscoso do contato Biela/Pistão

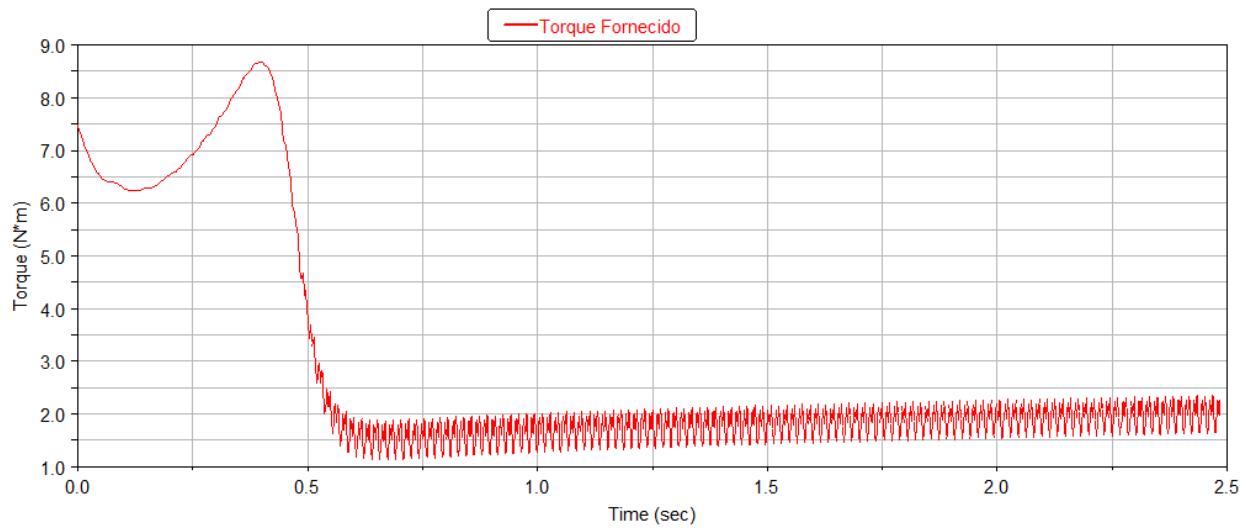


Figura 64: Torque Fornecido pelo Motor Elétrico

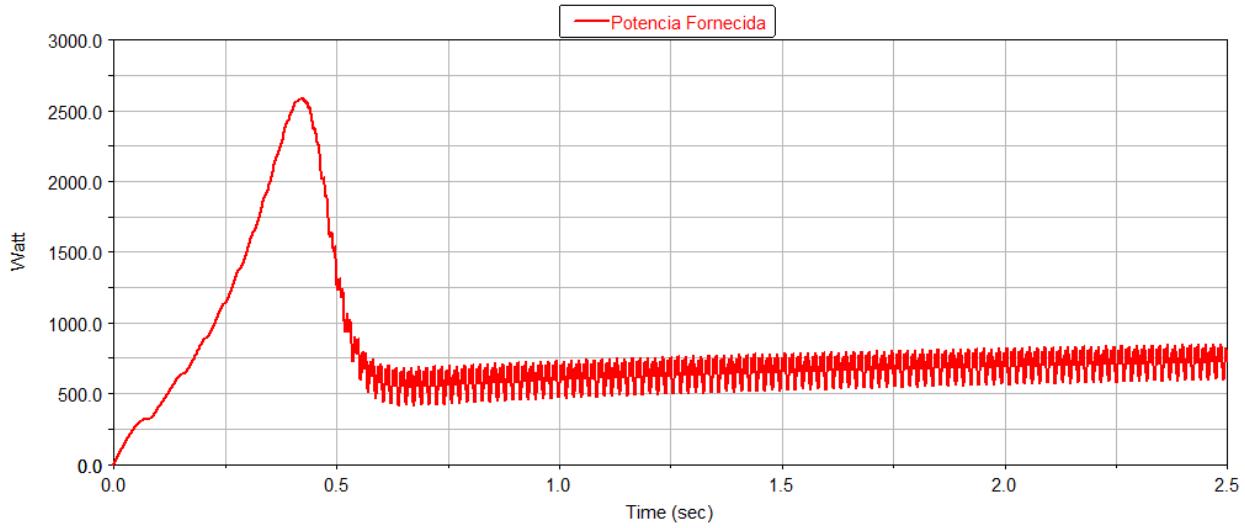


Figura 65: Potência Fornecida pelo Motor Elétrico

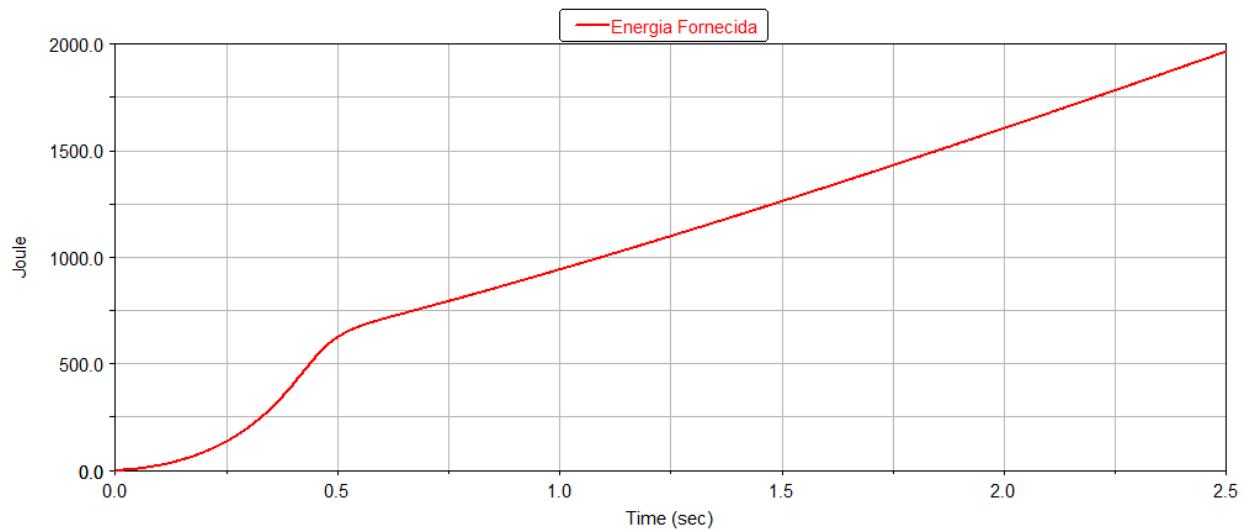


Figura 66: Energia Fornecida pelo Motor Elétrico

Os gráficos mostram que a estabilização do atrito viscoso em cada contato é altamente dependente da estabilização da excentricidade do contato. Além disso, para tal sistema, de atrito viscoso predominantemente baixo, a velocidade angular do volante não se alterou drasticamente (apresentando uma ligeira queda após o momento que parecia ter se estabilizado).

Quando simulou-se exatamente o mesmo sistema, com $R1=R2=R3=0.05\text{m}$, o resultado obtido foi:

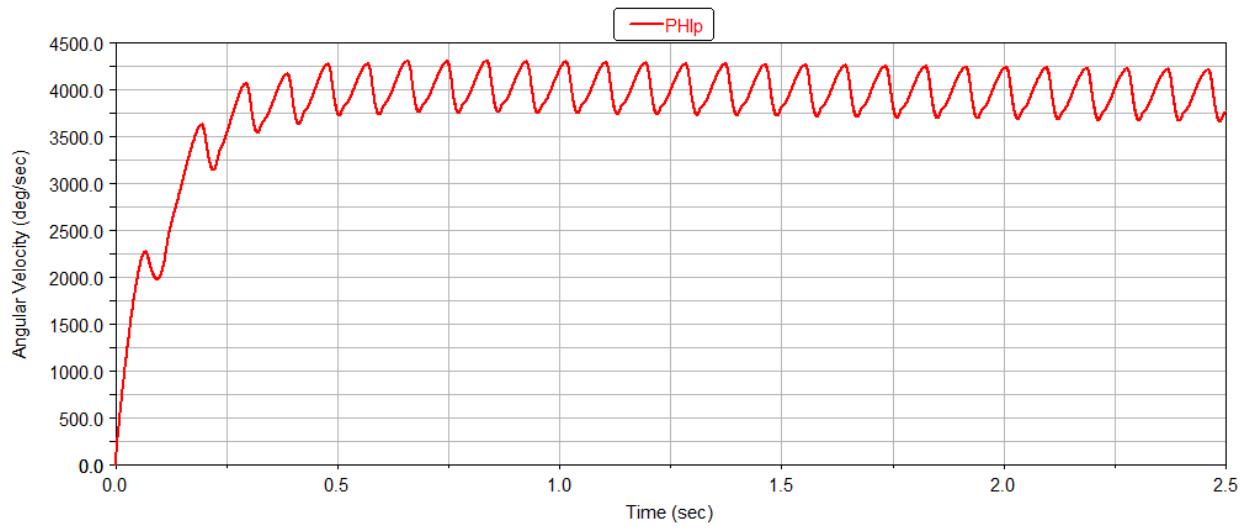


Figura 67: Velocidade Angular do Volante

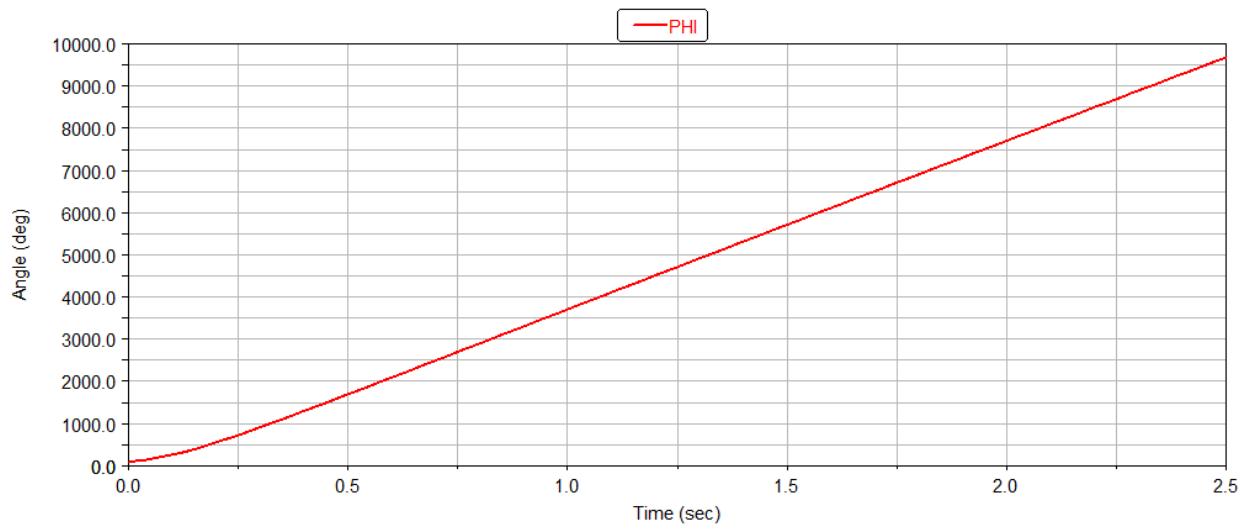


Figura 68: Ângulo de rotação do volante

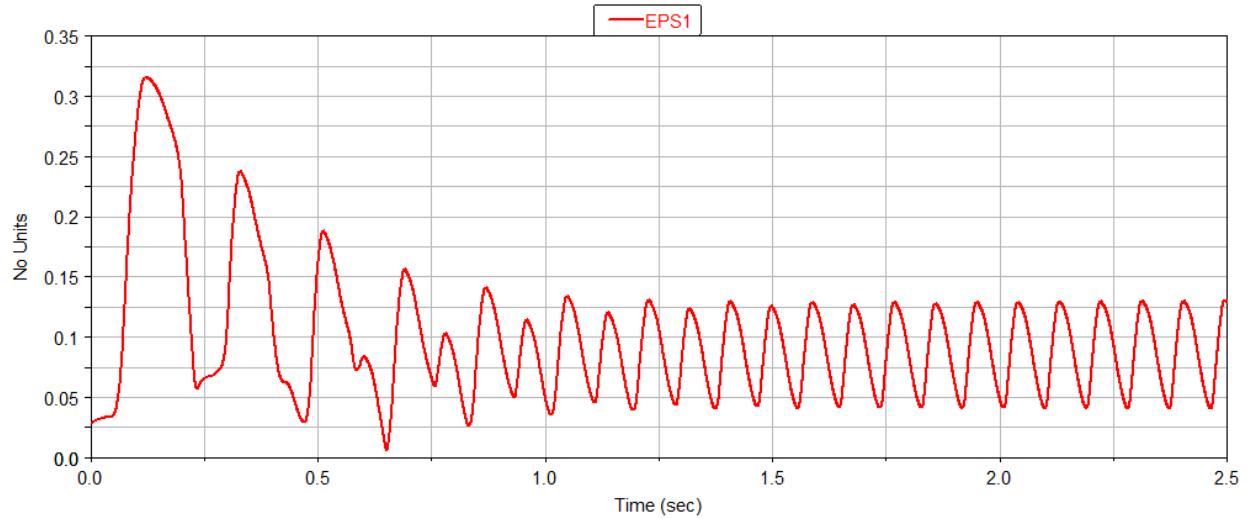


Figura 69: Ecentricidade do contato Mancal/Volante

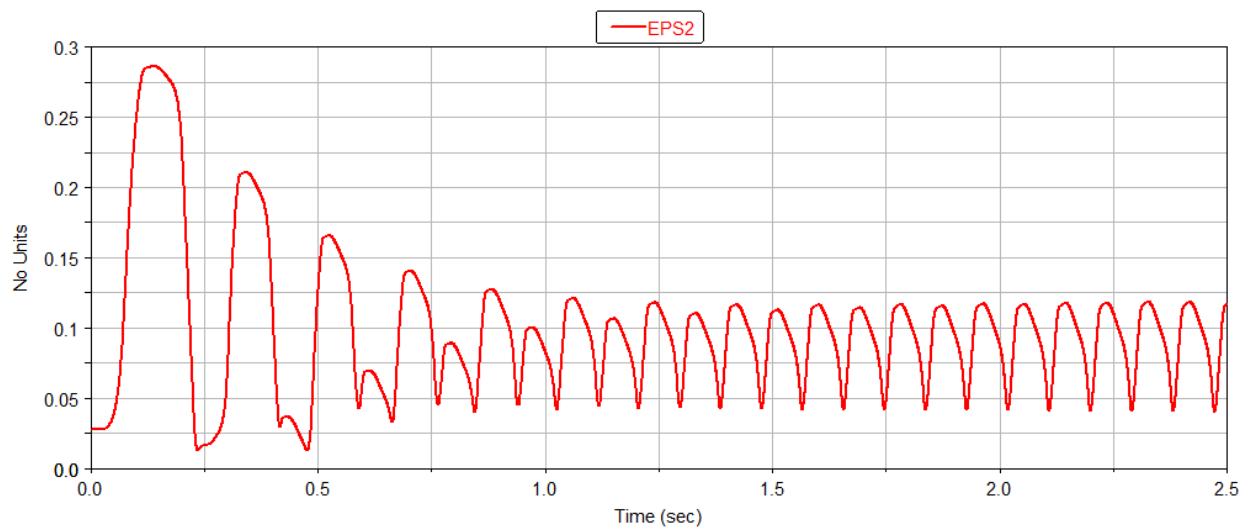


Figura 70: Excentricidade do contato Volante/Bielas

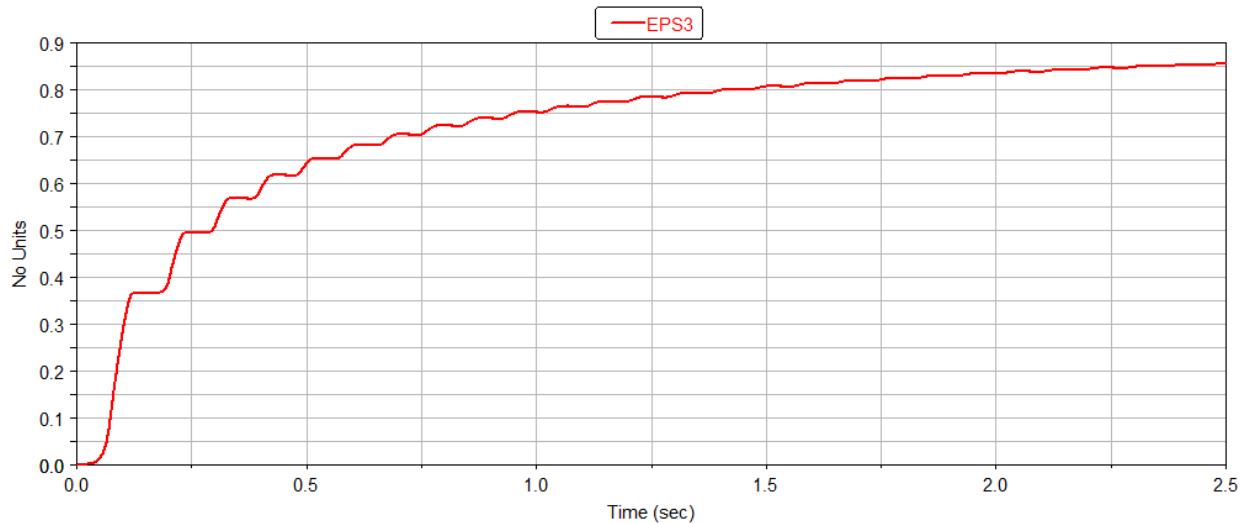


Figura 71: Excentricidade do contato Biela/Pistão

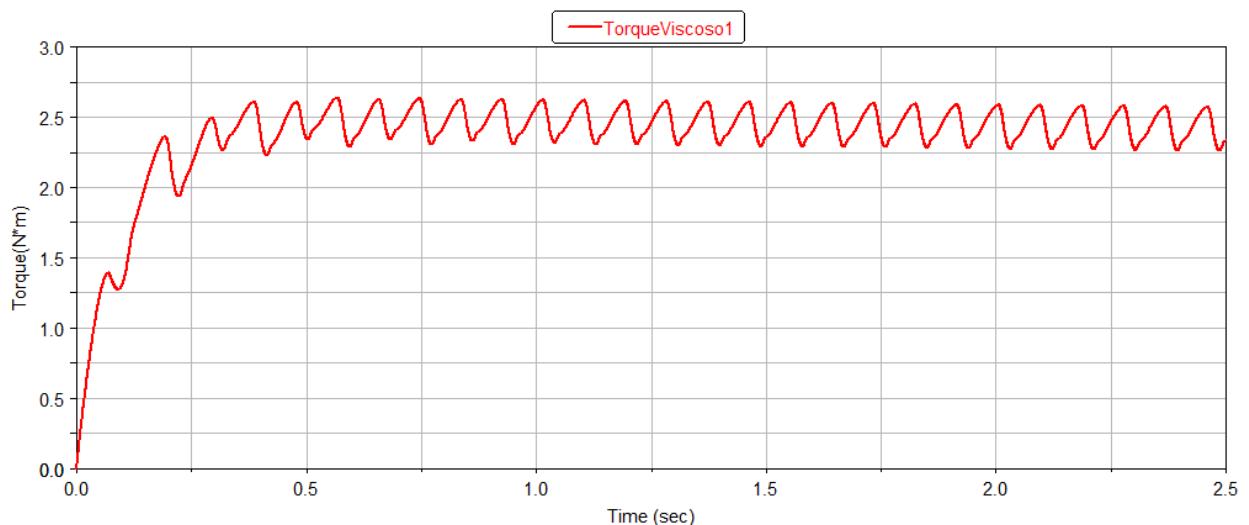


Figura 72: Atrito viscoso do contato Mancal/Volante

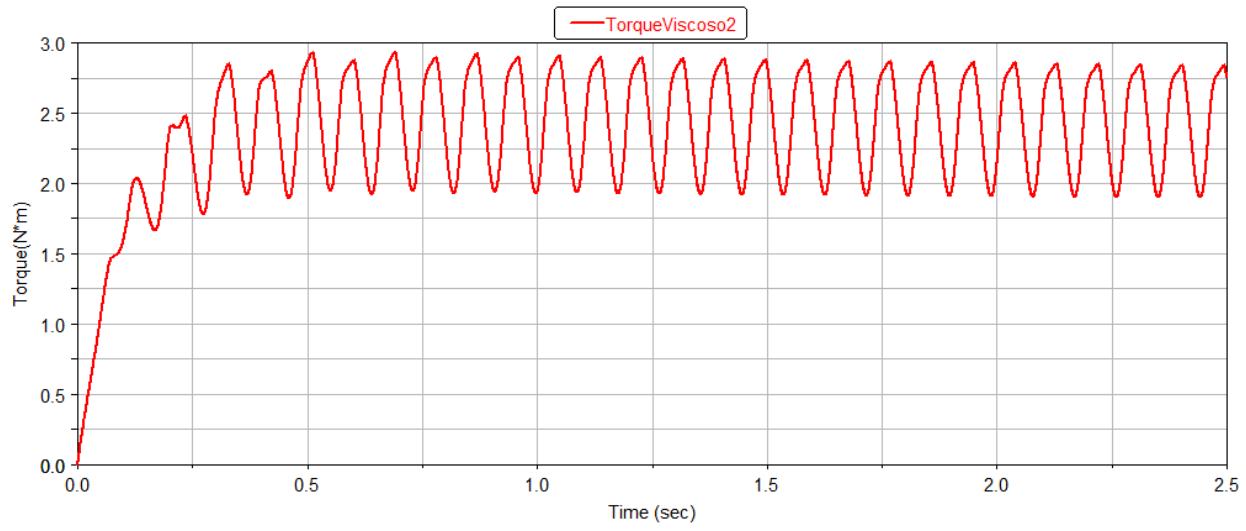


Figura 73: Atrito viscoso do contato Volante/Bielas

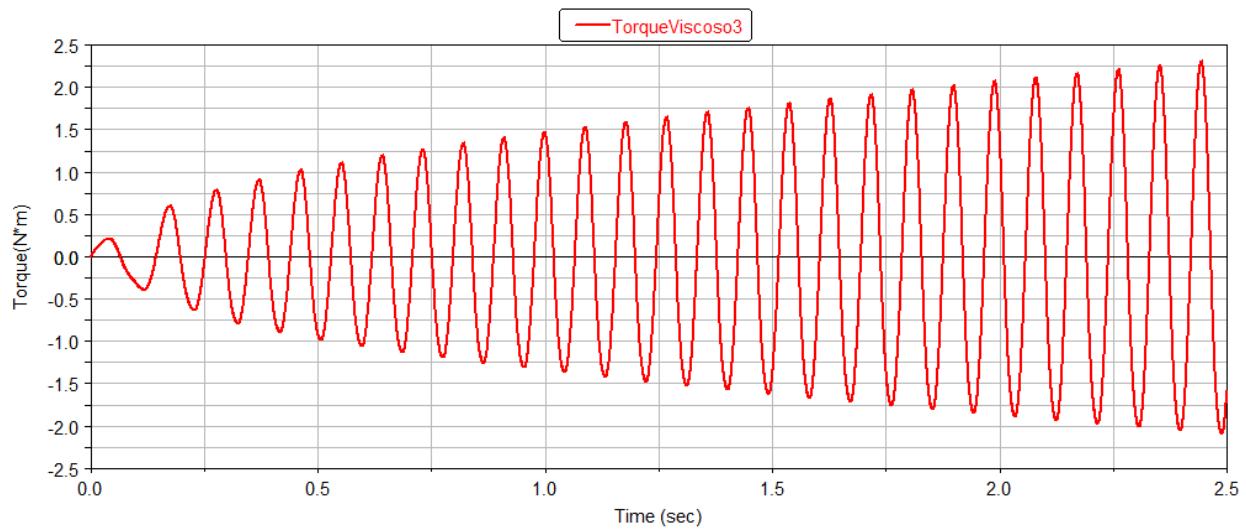


Figura 74: Atrito viscoso do contato Biela/Pistão

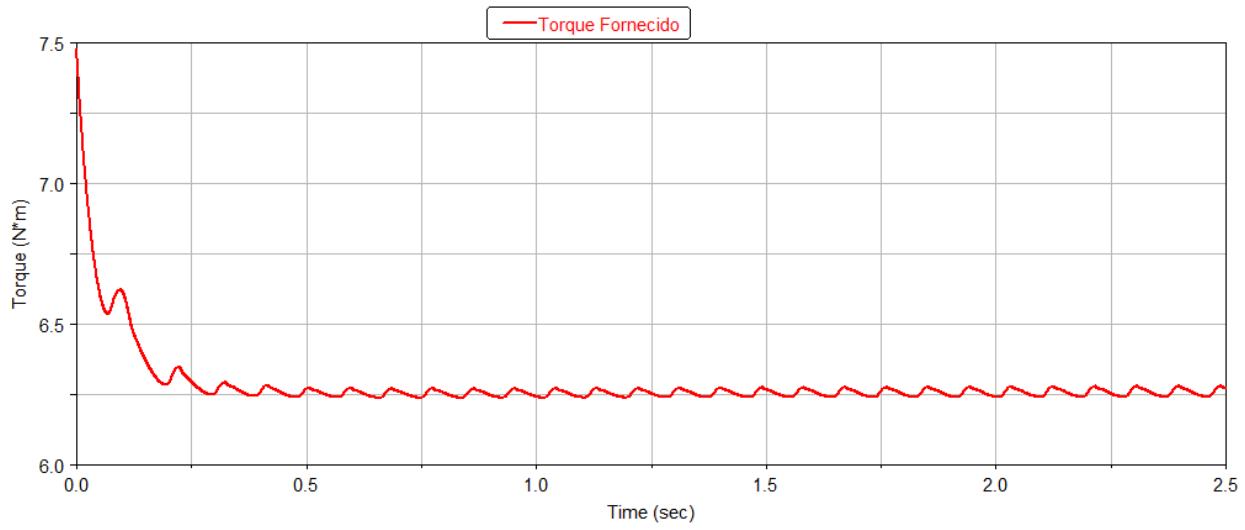


Figura 75: Torque Fornecido pelo Motor Elétrico

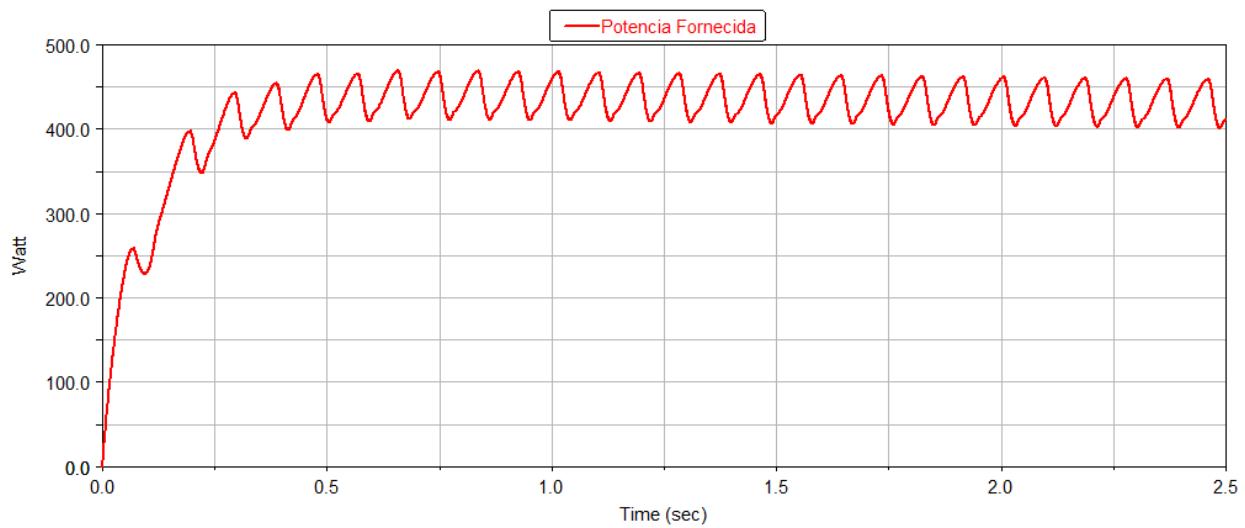


Figura 76: Potência Fornecida pelo Motor Elétrico

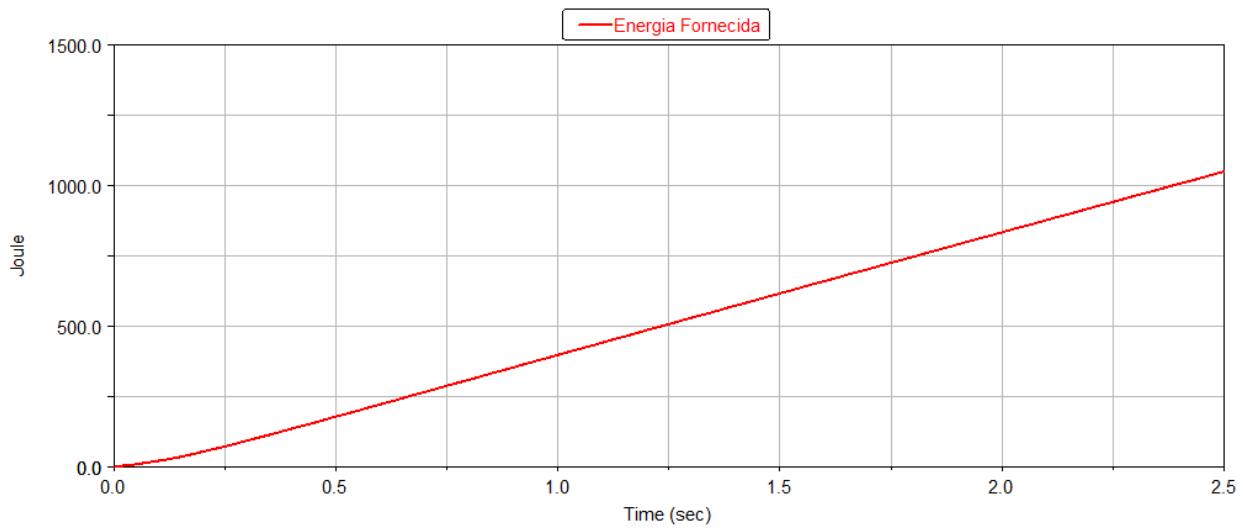


Figura 77: Energia Fornecida pelo Motor Elétrico

Essa simulação, em oposição à anterior, mostrou que as excentricidades se estabilizaram mais rapidamente, apresentando valores mais reduzidos. O torque viscoso, em compensação, devido ao maior raio do mancal e juntas hidrodinâmicas, foi muito maior, o que ocasionou um sistema lento, com torque mais alto fornecido pelo motor elétrico (que não conseguiu chegar e passar do ponto de torque máximo).

5. Resultados

Para o sistema com parâmetros

$$J_v = 0,008 \text{ kg m}^2; J_b = 0,0005 \text{ kg m}^2; M_p = 0,1 \text{ kg}; M_b = 0,1 \text{ kg}; M_v = 0,7 \text{ kg}; e = 0,025 \text{ m};$$

$$l = 0,1 \text{ m}; a = 0,05 \text{ m}; b = 0,0125 \text{ m}; P_{MAX} = 300.000 \text{ Pa},$$

e torque:

$T = 5 \cdot (-1,72 \cdot 10^{-14} \cdot \dot{\phi}^6 + 1,35 \cdot 10^{-11} \cdot \dot{\phi}^5 - 3,83 \cdot 10^{-9} \cdot \dot{\phi}^4 + 3,94 \cdot 10^{-7} \cdot \dot{\phi}^3 + 2,47 \cdot 10^{-5} \cdot \dot{\phi}^2 - 6,14 \cdot 10^{-3} \cdot \dot{\phi} + 1,50)$,
o resultado foi (sem mancal e juntas hidrodinâmicas):

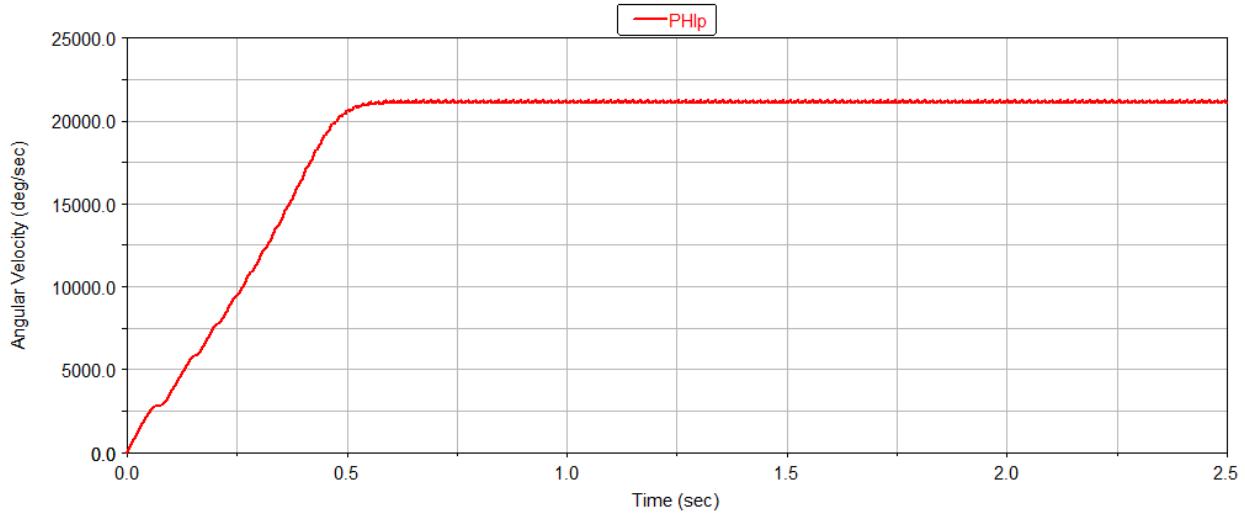


Figura 78: Velocidade Angular do volante

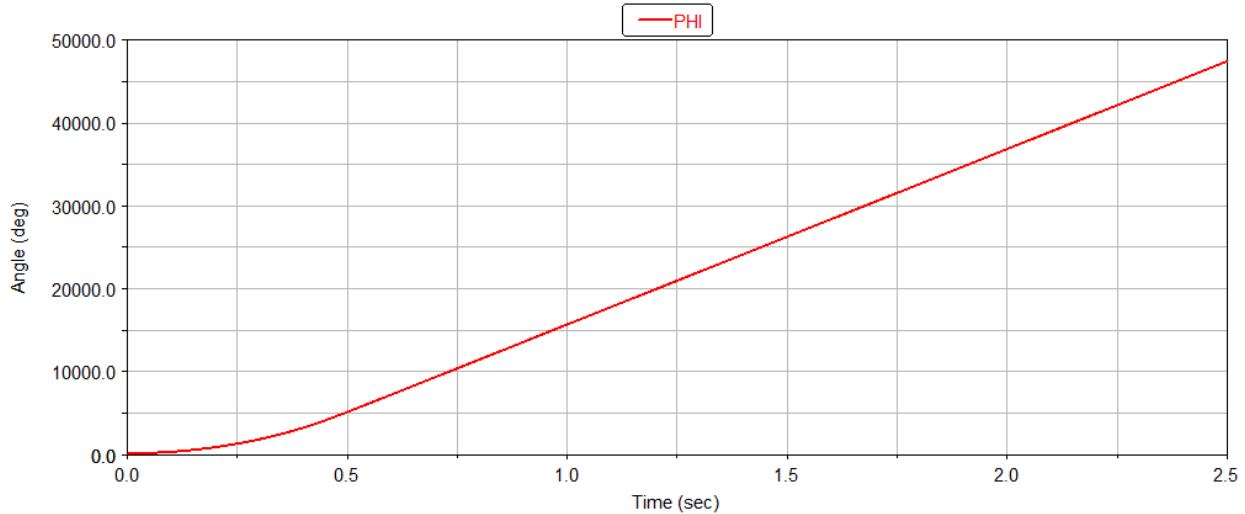


Figura 79: Ângulo de Rotação do Volante

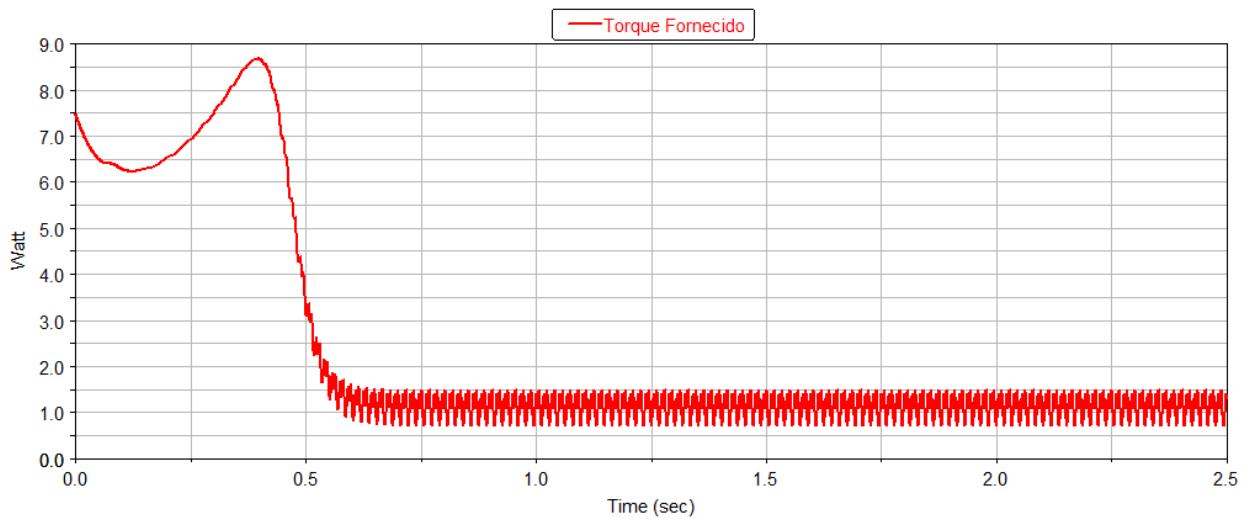


Figura 80: Torque Fornecido pelo Motor Elétrico

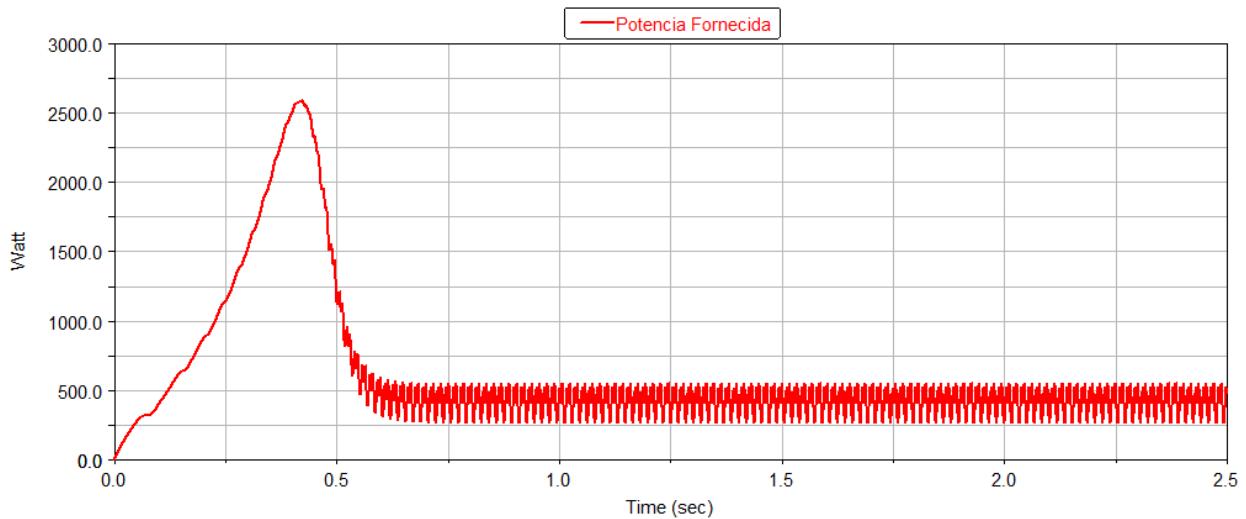


Figura 81: Potência Fornecida pelo Motor Elétrico

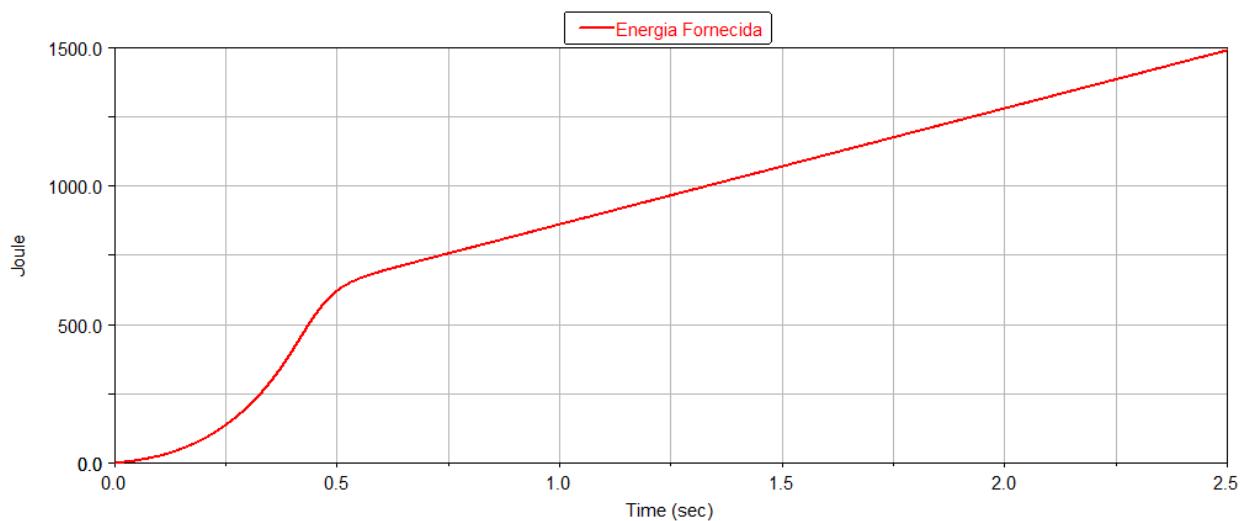


Figura 82: Energia Fornecida pelo Motor Elétrico

Portanto, o volume de ar comprimido e energia gasta foi respectivamente $2,56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ e 1490 J.

Quando se adicionaram o mancal e juntas hidrodinâmicos, com raios iguais a 0,005 m, com gráficos já apresentados em 4.8. Simulações do Sistema 8, os valores foram para $2,56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ e 1964 J. Isto mostra, como esperado, que quando o atrito viscoso não é significativamente alto, o motor fornece mais torque, fazendo com que o volume de ar comprimido praticamente não se altere e a potência aumente.

Já para o sistema com mancais e juntas hidrodinâmicas, com raios igual a 0,05 m, e gráficos também já apresentados em 4.8. Simulações do Sistema 8, os valores apresentados foram de $0,527 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ e 1048 J, mostrando que quando o atrito viscoso é maior, o motor fornece maior torque, a velocidades muito mais baixas, ocasionando potências menores, e volume de ar comprimido muito menor.

Com relação aos esforços nos mancais, pode se observar que o modelo criado com mancais hidrodinâmicos curtos pouco difere dos esforços de mancais ideais (se apresentam abaixo os esforços somente do intervalo de 1,9s até 2,5s que já está mais próximo da estabilização):

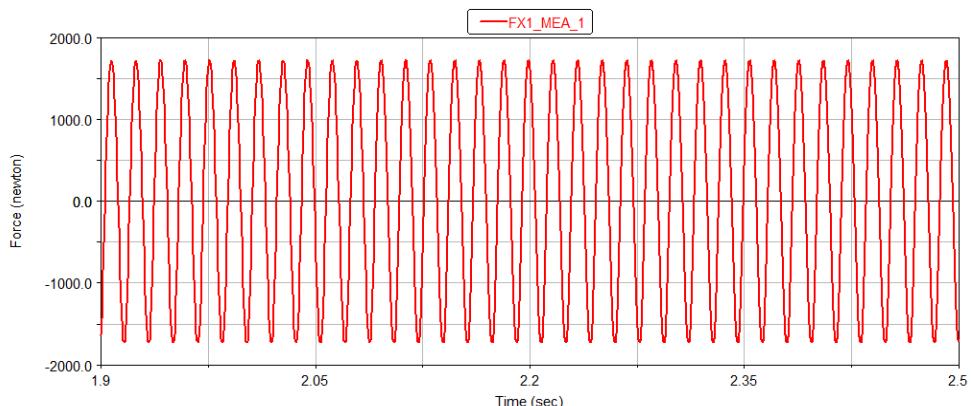


Figura 83: Esforços na direção X no contato Mancal/Manivela para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos

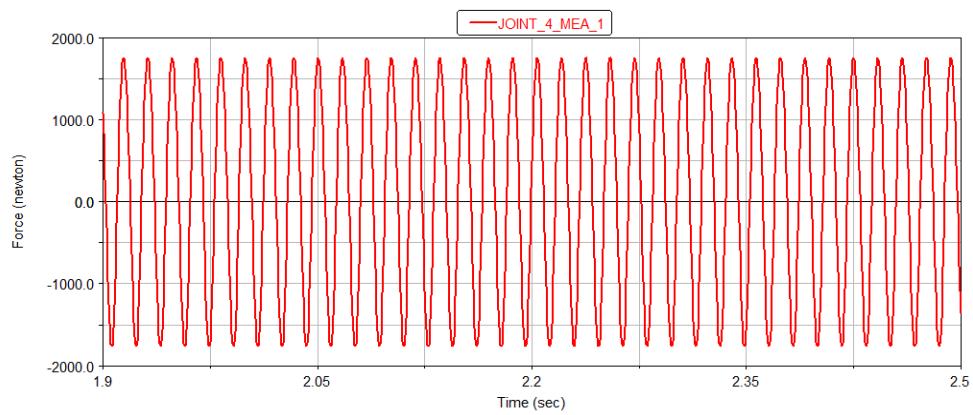


Figura 84: Esforços na direção X no contato Mancal/Manivela para o modelo com mancais ideais

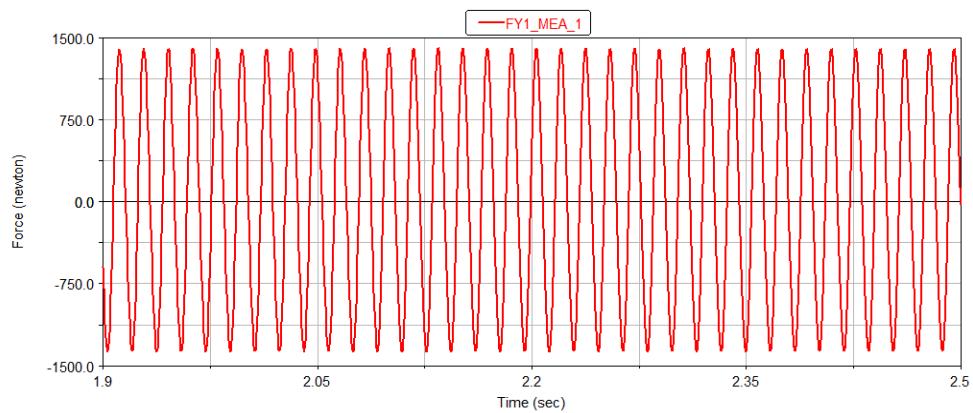


Figura 85: Esforços na direção Y no contato Mancal/Manivela para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos

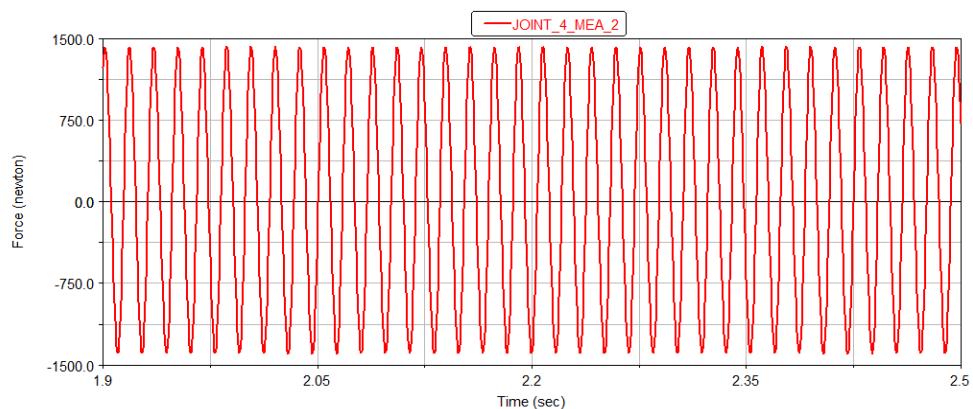


Figura 86: Esforços na direção Y no contato Mancal/Manivela para o modelo com mancais ideais

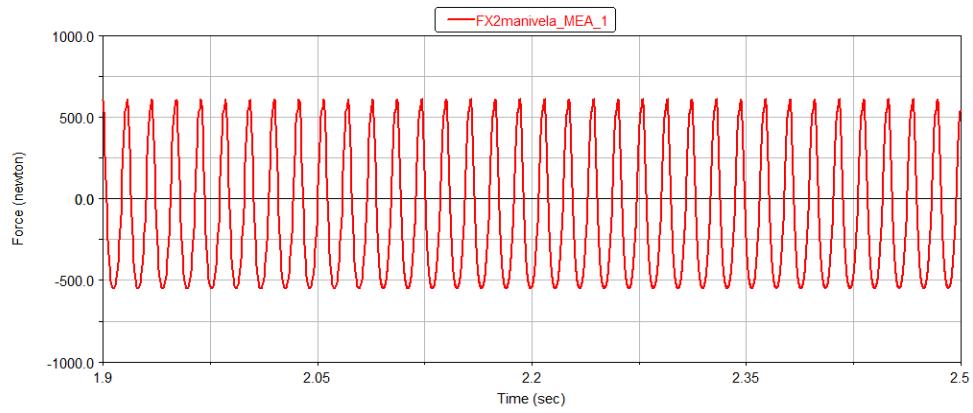


Figura 87: Esforços na direção X no contato Manivela/Bielas para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos

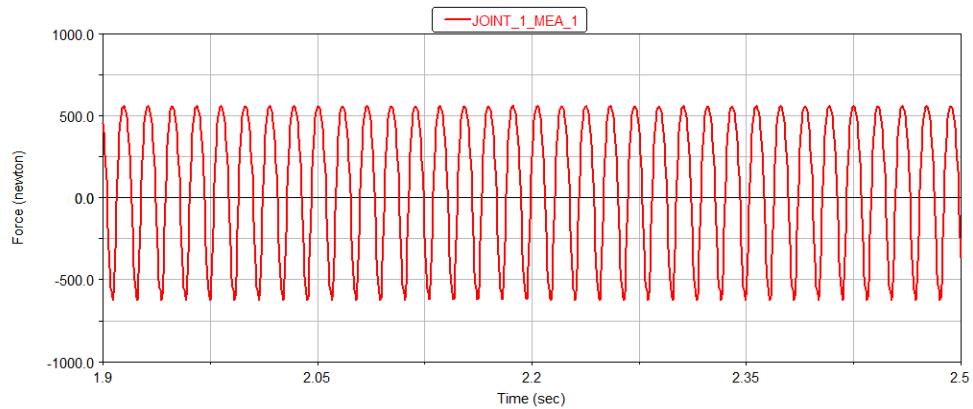


Figura 88: Esforços na direção X no contato Manivela/Bielas para o modelo com mancais ideais

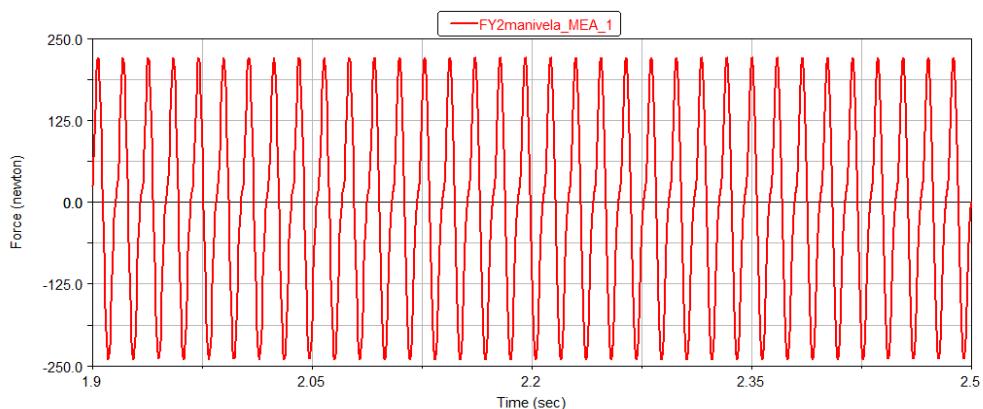


Figura 89: Esforços na direção Y no contato Manivela/Bielas para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos

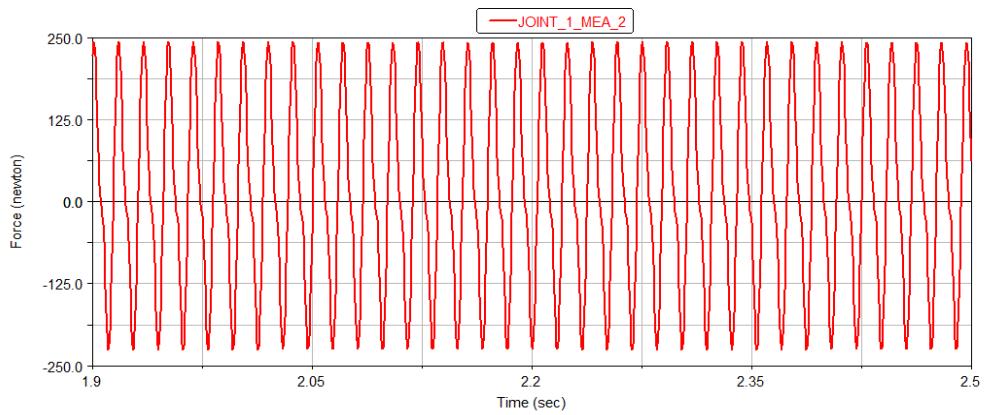


Figura 90: Esforços na direção Y no contato Manivela/Bielas para o modelo com mancais ideais

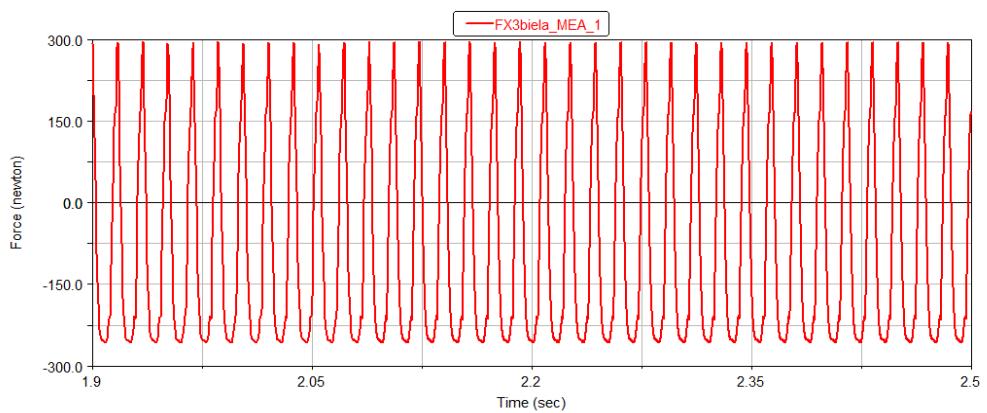


Figura 91: Esforços na direção X no contato Biela/Pistão para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos

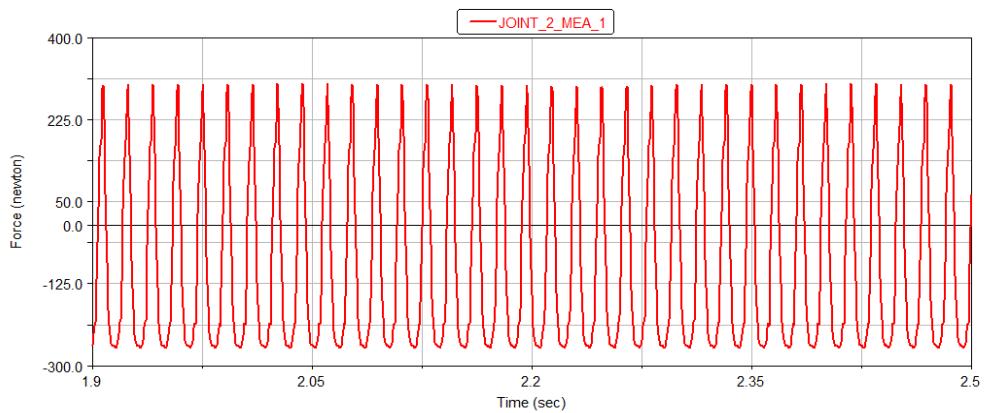


Figura 92: Esforços na direção X no contato Biela/Pistão para o modelo com mancais ideais

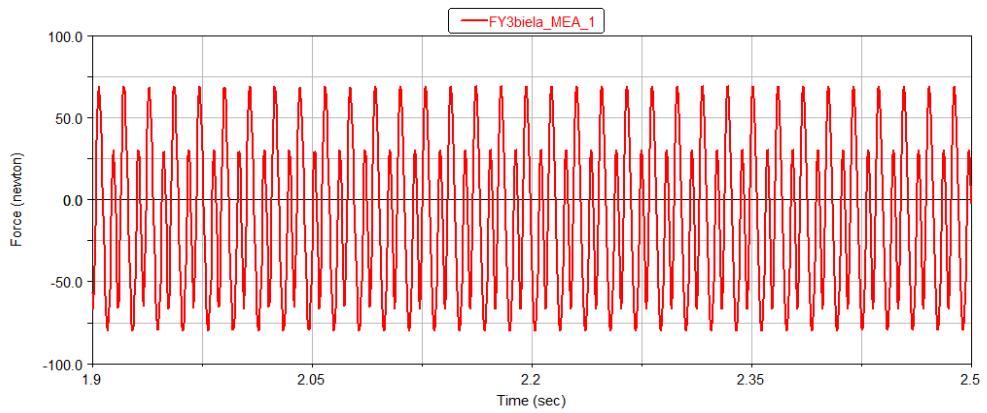


Figura 93: Esforços na direção Y no contato Biela/Pistão para o modelo com mancais hidrodinâmicos curtos

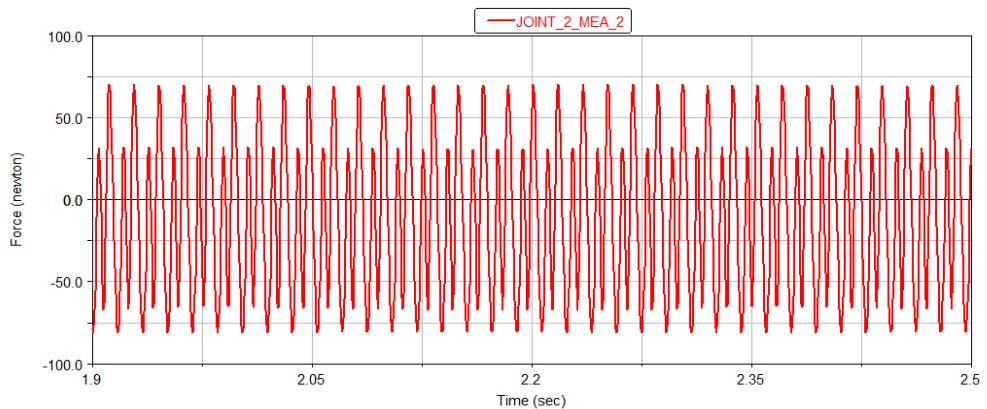


Figura 94: Esforços na direção Y no contato Biela/Pistão para o modelo com mancais ideais

6. Conclusões

O modelo criado permitiu a avaliação dos diversos parâmetros de um compressor alternativo comum, como já muito explorados na literatura, assim como a avaliação do seu mancal e juntas hidrodinâmicas, tanto na excentricidade e órbita dessas, assim como o atrito viscoso presente nelas.

Primeiramente, o modelo mostrou que existe uma pequena diferença de simulação entre o software ADAMS e matlab, proveniente do método de integração usado de cada um, que fica desprezível ao se atingir o regime permanente (da comparação dos sistemas 5 e 6).

Além disso, o modelo mostrou a faixa de grandeza do atrito viscoso para os casos estudados, assim como a sua curva característica, que é altamente dependente da excentricidade e velocidade relativa entre as partes, assim como dos elementos construtivos tais como comprimento, folga radial e principalmente raio, nos casos de mancais curtos.

Ele mostrou ainda, que, em um dos casos, não houve grande variação das velocidades dos elementos envolvidos (biela, manivela e pistão), mas sim da potência, pois como o atrito viscoso tende a desacelerar tais elementos, o torque fornecido pelo motor aumenta a ponto de reestabilizar as velocidades, e consequentemente aumentando a potência necessária.

Já no outro caso, onde o atrito observado foi muito maior (devido ao maior raio do sistema), pode-se observar que o sistema estabilizou mais rapidamente (ver seção 4.8. Simulações do Sistema 8) com significativas alterações nas velocidades dos componentes envolvidos, da potência desprendida pelo motor e do volume de ar comprimido pelo compressor.

Ele mostrou também que a estabilização da excentricidade das juntas e mancal hidrodinâmicos assim como do atrito viscoso é diferente que a estabilização da velocidade de biela, manivela e pistão (no caso mostrado, maior) quando considerados sem atrito.

O modelo construído não se restringe a pequenos compressores, como o caso estudo, podendo-se variar os parâmetros desse para se estudar compressores alternativos de grande escala também (ler o manual em anexo).

O modelo, porém, possui a restrição de mancais hidrodinâmicos curtos, apresentando resultados distoantes da realidade quando o raio do mancal for menor que duas vezes o seu comprimento, e assim só poderá servir como base de comparação para um modelo mais complexo de mancais hidrodinâmicos quando tais valores forem respeitados.

7. Bibliografia

- BASSETTO, IZEDS F. F., *Estudo de Confiabilidade de Compressores Alternativos Semi-Herméticos de Sistemas de Refrigeração*. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Tese (Mestrado);
- CHLUMSKÝ, VLADIMÍR, *Reciprocating and Rotary Compressors*. SNTL Publishers of Technical Literature, Prague, 1965;
- COUTO, PAULO R. C., *Análise de Mancais Radiais Hidrodinâmicos com Aplicação em Compressores Herméticos de Refrigeração*. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006 (Tese de Doutorado);
- DOSSAT, ROY J.; HORAN, THOMAS J., *Principles of refrigeration*, 5^a edição. Prentice Hall, 2001;
- DURVAL, D. Jr., *Tribologia, Lubrificação e Mancais de Deslizamento*. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2005.
- ESTUPIÑAN, E. A., SANTOS, I. F., *Dynamic Modeling of Hermetic Reciprocating Compressors, Combining Multibody Dynamics, Finite Elements Method and Fluid Film Lubrication*. International Journal of Mechanics, Issue 4, Volume 1, 2007;
- FELLER, EUGENE W. F., *Air Compressors: Their Installation, Operation and Maintenance*, 1^a edição. McGraw Hill, New York, 1944;
- GERARDIN, Rodrigo Ceccatto, *Modelo Dinâmico do Sistema Pistão-Biela-Manivela com Mancais Hidrodinâmicos*. Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 80 p, (Dissertação de Mestrado);
- HARNOY, A., *Model-Based Investigation of Friction During Start-Up of Hydrodynamic Journal Bearings*. Journal of Tribology vol. 117. Outubro, 1995.
- IZUKA, J. H., *Dinâmica de Sistema Rotor-Biela-Pistão de Compressores Alternativos com Mancais Radiais Hidrodinâmicos*. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009;
- KIRK, R. G., GUNTR Jr., E. J., *Transient Journal Bearing Analysis*, Nasa Report CR 1549, June, 1970
- LEMOS, NIVALDO A. *Mecânica Analítica*, 2^a edição, São Paulo, Editora Livraria da Física, 2007;
- MARTINS, CLÓVIS DE ARRUDA. *Introdução à Mecânica Analítica*. Notas de Aula, 2006;
- PESCE, CELSO PUPO, *Dinâmica dos Corpos Rígidos*. São Paulo, 2004;
- PRATA, A. T., FERNANDES, J. R. S., FAGOTTI, F. *Piston Lubrication in Reciprocating Compressors*. Engenharia Térmica, n. 1, 2001, p. 56 – 63;

SERRANO, J. R., *Numerical Simulation and Experimental Validation of Hermetic Reciprocating Compressors. Integration of Vapour Compression Refrigerating Systems*. Universitat Politecnica de Catalunya, Terrassa, 2002. Tese (Doutorado);

SHAPIRO, HOWARD N; MORAN, MICHAEL J., *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 5^a edição. West Sussex, John Wiley & Sons Ltd, 2006;

SILVA, R. B., *Compressores Bombas de Vácuo Ar Comprimido*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1977;

WEG. *Catálogo de Motores Elétricos - Baixa Tensão (Mercado Brasil)* . Disponível em <http://www.weg.net/files/products/WEG-motores-eletricos-baixa-tensao-mercado-brasil-050-catalogo-portugues-br.pdf>;

ZACHARIADIS, D. C., *Short Bearing Model for the Evaluation of Journal's Dynamic Angular Misalignment Effects on Rotor Vibrations*, ASME paper 98-GT-397, ASME 43rd Gas Turbine Technical Congress, Stockholm, Sweden, 1998.

Anexos

Manual de utilização do ADAMS:

Nesse manual estão indicados os passos básicos para que o leitor saiba como lidar com o modelo em ADAMS criado para o sistema pistão-biela-manivela com mancal e juntas hidrodinâmicos de um compressor. Não é intuito deste familiarizar o leitor com o ADAMS inteiros, somente com as partes relacionadas ao modelo, para seu uso. O ADAMS possui algumas plataformas diferentes de trabalho, como a Car, a View, a Solver, entre outras. Para a utilização do modelo só se faz necessário o entendimento do ADAMS View.

Primeiramente o leitor deve abrir o modelo criado em ADAMS, a partir do ADAMS View, e para isso ao abrir o ADAMS View deve escolher a opção Import a File e apontar no campo ao lado de “Start in” para a pasta onde o modelo está salvo e clicar em “Ok”. Após isso, deve dar um duplo clique (ou clique com o botão direito do mouse, seguido da opção “Browse”) no campo ao lado de “File to read” e selecionar o arquivo onde está o modelo.

O modelo aberto já está funcionando, necessitando somente dos dados de entrada do sistema. Porém, para a familiarização do leitor, será mostrado o passo a passo na construção do sistema, desde o início, para o caso da necessidade de alguma alteração no futuro.

O primeiro passo a se realizar é inserir variáveis construtivas do sistema. Essas variáveis podem ser alteradas entre simulações, porém durante uma simulação elas possuem valor fixo, diferenciando-se assim das variáveis de estado do sistema, que serão explicadas posteriormente. Para se inserir uma nova variável construtiva, tem que se apontar no menu superior para “Build”, em seguida para “Design Variable” e finalmente para “New”. No campo ao lado de “Name” deve-se inserir .”nome do sistema”.“nome da variável”.

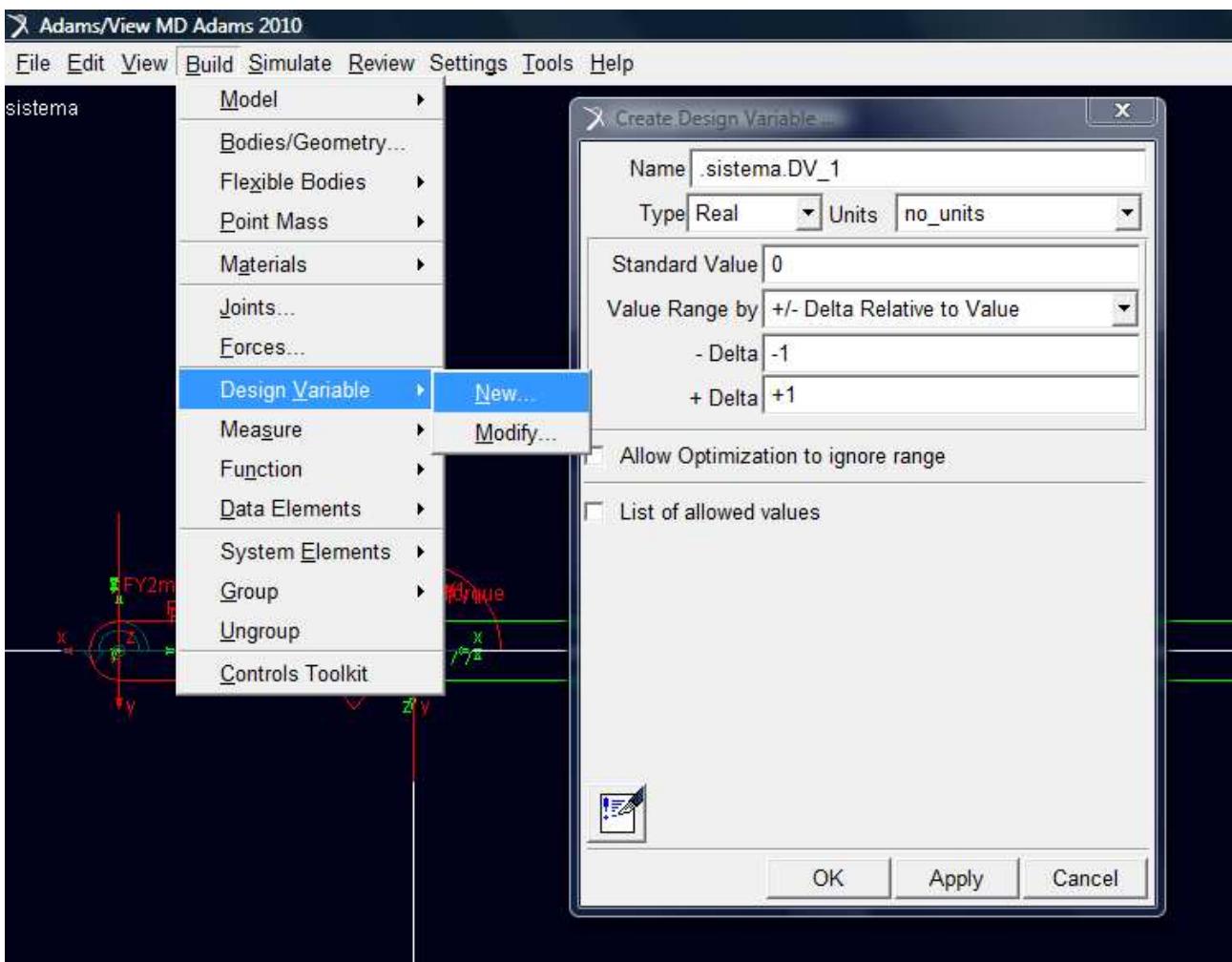


Figura 95: Variáveis Construtivas

As variáveis construtivas do sistema são:

- A: (área transversal do cilindro da câmara de compressão, sendo igual a $\frac{\pi \cdot D^2}{4}$);
- clearance1; clearance2 e clearance3 (folga radial dos diversos mancais hidrodinâmicos com índices já explicados na seção de modelagem do sistema);
- cm_bielas (distância do ponto de contato entre biela e pistão para o centro de massa da biela);
- cm_manivela (distância entre o ponto de contato entre manivela e mancal para o centro de massa da manivela);
- comprimento1; comprimento2 e comprimento3 (comprimento dos diversos mancais hidrodinâmicos com índices já explicados na seção de modelagem do sistema);
- comprimento_pistão (comprimento do pistão, e não possui influência sobre a simulação do sistema, sendo somente visual);

- D (diâmetro do pistão sendo igual a $2 \cdot \text{raio_pistao}$);
- e (comprimento do ponto de contato entre manivela e mancal até o ponto de contato entre manivela e biela);
- grossura (espessura de biela e manivela, e não possui influência sobre a simulação do sistema, sendo somente visual);
- J_b e J_v ; (momento de inércia da biela e manivela respectivamente, com relação ao ponto de contato entre biela e pistão e manivela e mancal, respectivamente). Este parâmetro requer atenção para que não se gere biela e manivelas com ponto algum com momento de inércia menor que zero (lembrar do teorema dos eixos paralelos);
- k (constante politrópica);
- l (comprimento da biela, desde o ponto de contato com a manivela, até o ponto de contato com o pistão);
- M_b ; M_p e M_v (massas da biela, pistão e manivela, respectivamente);
- μ_i (viscosidade do óleo utilizado para lubrificação);
- P_{ATM} (pressão atmosférica);
- P_{MAX} (pressão de descarga do compressor);
- P_{MIN} (pressão de sucção do compressor);
- raio_1 ; raio_2 e raio_3 (raio dos diversos mancais hidrodinâmicos com índices já explicados na seção de modelagem do sistema);
- raio_pistao (raio do pistão);
- T_0 (torque inicial, quando o motor considerado for linear);
- V_M (volume morto da câmara de compressão);
- V_{MAX} (volume máximo da câmara de compressão desconsiderando o volume morto, sendo igual a $2 \cdot e \cdot A$), e;
- w (velocidade de torque nulo para motor linear).

Feito isso, o sistema em si terá de ser construído. Para isso se utilizará a ferramenta (clicando com o botão da direita) no botão da segunda coluna da primeira linha do menu “Main Tool”. Primeiramente se criará a manivela clicando em na opção “Link”, deixando ativada a opção “New Part”. No campo abaixo de “Length” se colocará a variável e , nos campos abaixo de Width e Depth se colocará a variável *grossura* (sem esquecer de ativar as caixas relacionadas às dimensões), e em seguida se clicará com o botão da direita em qualquer lugar e na caixa que aparecer se colocarão os dados “0, 0,

0" e "related to origin" (ou pode-se clicar diretamente no ponto 0, 0, 0 no desenho) e depois se clicará novamente com o botão da direita em qualquer lugar e na caixa que aparecer se colocarão os dados "(-e), 0, 0" (ou pode-se clicar em qualquer ponto negativo do eixo x).

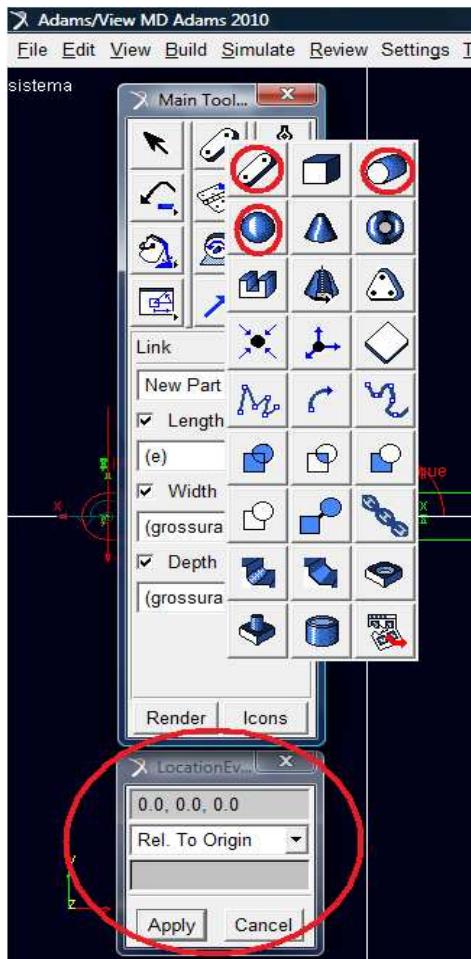


Figura 96: Construção de Sólidos

Similarmente se criará a biela, só que com "Length" com variável *l*, com o ponto inicial sendo "(-e), 0, 0", e ponto final como "(-e+l), 0, 0". Já o pistão será criado com a ferramenta "Cylinder" no mesmo menu de "Rigid Body", e "Length" com variável *comprimento_pistao* e "Radius" com variável *raio_pistao*, ponto inicial "(-e+l), 0, 0" e ponto final "(-e+l+comprimento_pistao), 0, 0".

Além dessas partes, devem ser construídas também duas partes adicionais que serão os apoios do sistema. A primeira será o mancal de apoio da manivela, por simplicidade uma esfera, no centro de referência, e portanto clica-se em "Sphere" em "Rigid Body", deixando a opção "On Ground" ativa. Pode-se colocar qualquer valor de raio para a esfera, contanto que sua posição fique no centro de referência. A segunda será o

cilindro da câmara de combustão, portanto a ferramenta “Cylinder” de “Rigid Tool”, com a opção “On Ground” ativa, podendo se colocar o mesmo valor de raio do pistão, e qualquer comprimento, desde que fique orientado no mesmo sentido que o pistão.

Em sequência, deveriam ser criados os vínculos do sistema. Porém não serão utilizados os vínculos fornecidos pelo ADAMS para o contato entre manivela com mancal, entre biela e manivela, e pistão com biela, pois serão justamente os vínculos a serem simulados e estudados (que seriam a opção “Revolute” dentro do botão da segunda coluna da segunda linha do menu “Main Tool”). Cria-se portanto somente o vínculo entre pistão e cilindro, que será a opção “Cylindrical” dentro do botão da segunda coluna da segunda linha do menu “Main Tool”, escolhendo-se as opções “2 Bod- 1 Loc”, “Pick Feature”, “Pick Body” e “Pick Body” e posteriormente escolhendo-se o pistão e o cilindro (dica:se estiver difícil escolher o corpo, por estarem ocupando o mesmo espaço, clique com o botão da direita sobre eles para abrir um menu com as opções), sendo a localização do vínculo no centro do pistão e vetor de orientação na direção do eixo de ambos. Após isso, por comodidade deixa-se o cilindro invisível, clicando com o botão da direita sobre ele e em seguida “Appearence”, selecionando transparência para 100%.

O próximo passo é criar as medições que o ADAMS realiza ao longo da simulação e que podem ser depois apresentadas em gráficos. Para isso deverá se acessar o menu “Build”, “Measure”, “Point-to-Point” e “New”. A nomenclatura é similar à das variáveis construtivas, mas agora deve-se escolher, conforme a variável a ser medida, se é uma distância, uma velocidade, uma aceleração, uma velocidade angular ou uma aceleração angular. Será mostrado o exemplo para uma variável medida e em seguida e depois se explicarão cada uma das outras variáveis.

Portanto, para medir, por exemplo, a variável X2p que é a velocidade relativa, em x, do ponto da biela do contato entre biela e manivela e ponto da biela do contato entre biela e manivela (lembre-se que não é zero, pois existe a excentricidade proveniente da teoria de mancal hidrodinâmico), utiliza-se a opção “Characteristic: Translational Velocity”, “Component: X”. Para se definir os pontos “To Point” e “From Point” clica-se com o botão da direita em tais campos “Marker” e “Pick”, e clica-se nos pontos desejados. O ADAMS cria uma série de marcadores para cada parte que é criada, para facilitar na hora de criar tais medidas, e quando se clicar com o botão da direita em cima de uma peça, no momento da escolha dos pontos, serão mostrados os marcadores naquele ponto, para ficar mais fácil a escolha. Se se souberem os marcadores, pode-se usar também a opção “Marker” e “Browse”.

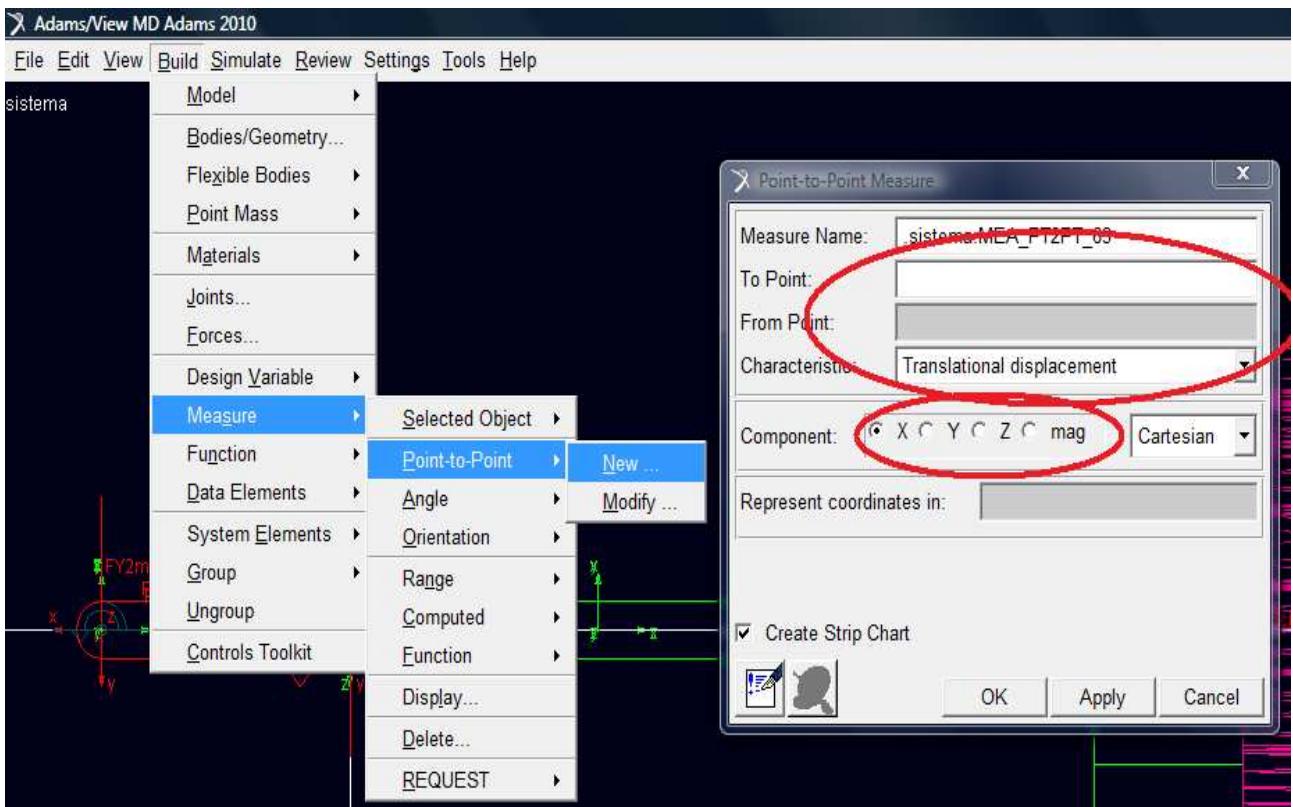


Figura 97: Measures

As medidas do sistema são:

- OMEGA2, OMEGA3 (velocidade angular relativa entre biela e manivela e velocidade angular relativa entre biela e pistão, respectivamente);
- PHip (velocidade angular da manivela);
- X1, X2 e X3 (excentricidade em x para os diversos componentes dos mancais hidrodinâmicos com índices já explicados na seção de modelagem do sistema);
- X1p, X2p, X3p (derivadas temporais de X1, X2 e X3);
- Y1, Y2 e Y3 (excentricidade em x para os diversos componentes dos mancais hidrodinâmicos com índices já explicados na seção de modelagem do sistema);
- Y1p, Y2p, Y3p (derivadas temporais de Y1, Y2 e Y3), e;
- XP e Xpp (distância entre o centro de referência e o ponto de contato da biela com o pistão e sua derivada temporal).

Após a criação das medidas do sistema, é necessário criar as forças que agem no mancal e nas juntas do sistema. Mas para isso, serão criadas algumas variáveis de estado que diminuem o tamanho da função a ser inserida. As variáveis de estado, como já dito, são aquelas que possuem valor variável ao longo da simulação. Para criar uma variável de estado deve se recorrer novamente ao menu “Build”, “System Elements”,

“State Variable” e “New”. Para se alterar a fórmula da variável, basta clicar nos 3 pontos ao lado direito do campo “F(time, ...)”, e para alterar a condição inicial, basta alterar ao lado do campo “Guess for F(t=0) =”. Quando uma variável de estado, ou qualquer outra função do ADAMS se referir a uma outra variável de estado, é necessário que ela utilize o comando “varval(“variável referida”)”.

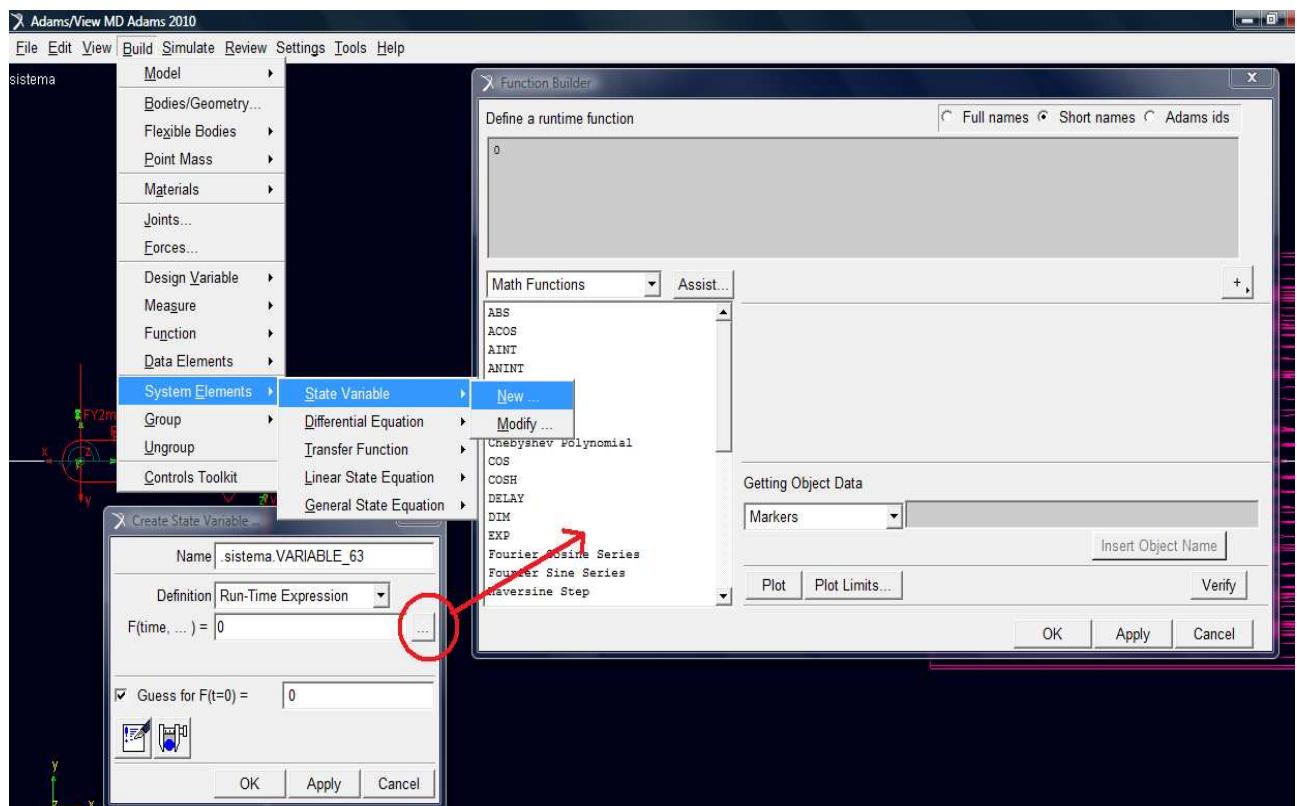


Figura 98: State Variables

As variáveis de estado do sistema são:

- t (torque de entrada do sistema);
- $E_i ((X_i^2 + Y_i^2)^{0.5} , i = 1, 2 \text{ ou } 3)$;
- $\text{EPS}_i (\frac{\text{varval}(E_i)}{\text{clearance}_i} , i = 1, 2 \text{ ou } 3)$;
- $\text{EPSip} (, i = 1, 2 \text{ ou } 3)$;
- $\text{GAMMAip} (\frac{-(Y_i \cdot X_i p - X_i \cdot Y_i p)}{\text{varval}(E_i)^2} , i = 1, 2 \text{ ou } 3)$;
- $\text{Aepsi} ((1 - \text{varval}(\text{EPS}_i)^2)^{0.5} , i = 1, 2 \text{ ou } 3), e$;
- $\text{Bepsi} (1 + 2 \cdot \text{varval}(\text{EPS}_i)^2 , i = 1, 2 \text{ ou } 3)$;

- TorqueViscosoi ($\frac{L_i \cdot \mu \cdot R_i^2}{C_i} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{(1 - \epsilon_i^2)^{0,5}} \cdot \omega_i$, i = 1, 2 ou 3);
- Potência (que é a multiplicação do torque fornecido por PHIp).

Também é criada uma equação diferencial somente para se medir a energia fornecida pelo motor, similarmente ao que foi feito nas variáveis de estado. Como a energia é a integração da potência no tempo, basta que sua fórmula seja: varval(potencia).

Em seguida serão criadas as forças dos vínculos no sistema, com o botão da segunda coluna da quarta linha do menu “Main Tool”, “Force (Single Component)”. Se escolhe a opção “Space Fixed” e “Pick Feature”. Em seguida se colocam as forças, com valor constante qualquer (que depois será alterado) em cada mancal e junta, que são dez no total: em x e y para a conexão da manivela com mancal; x e y para a conexão da manivela com a biela, tanto para a manivela como para a biela, e; em x e y para a conexão da biela com o pistão, tanto para a biela, quanto para o pistão. Tais forças terão tamanho reduzido com a ajuda da função “varval” e com as variáveis de estado reduzido, e para a sua alteração (de constante para a fórmula dada pela teoria de mancal curto hidrodinâmico) é necessário clicar na força com o botão direito do mouse e em seguida modify.

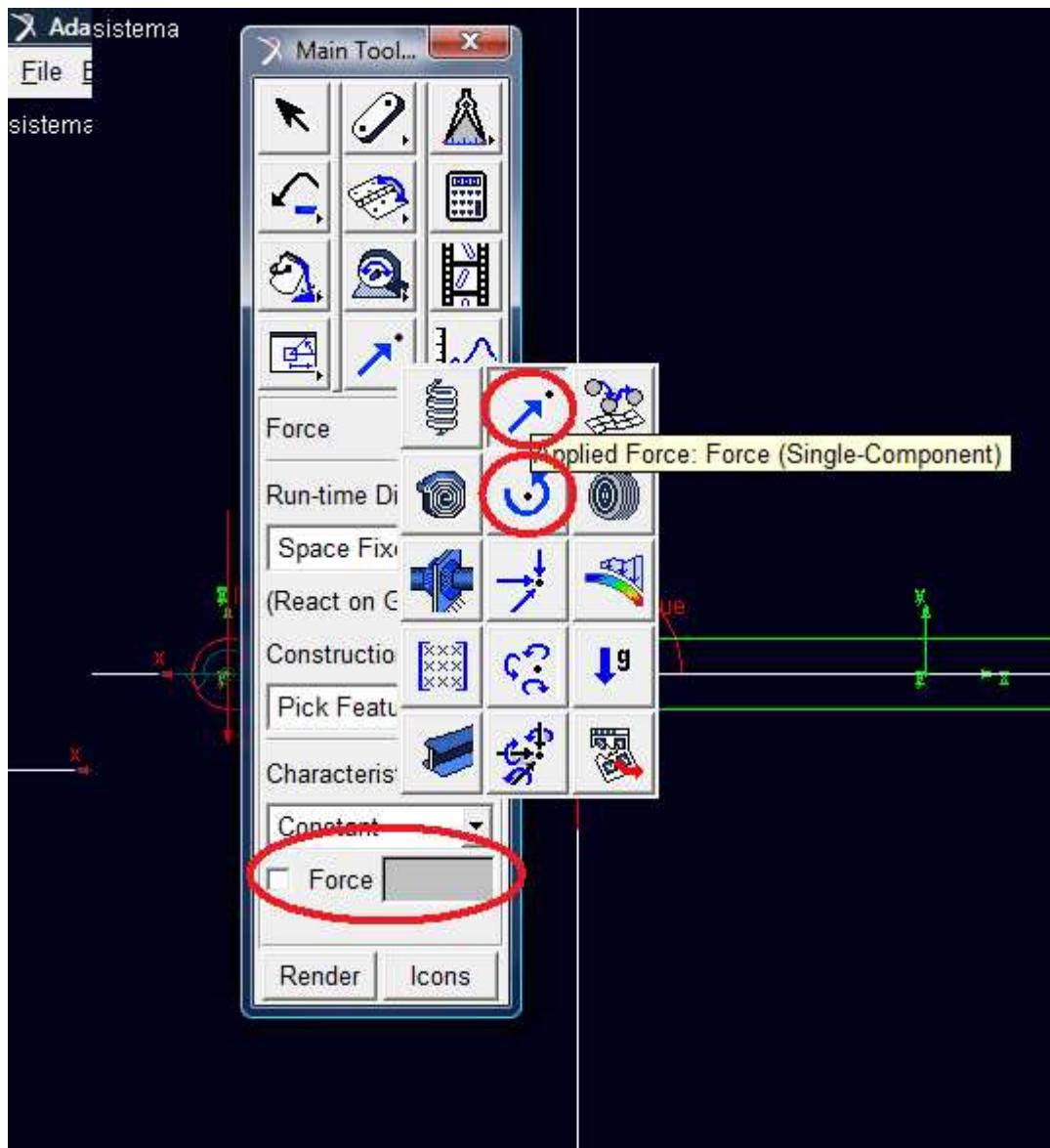


Figura 99: Forças Externas

Por fim, serão criados os esforços externos do sistema, que são o torque fornecido pelo motor à manivela, a força de resistência do ar na câmara de compressão e os torques viscosos no mancal e juntas. Tais esforços são similares à criação dos esforços nos vínculos, sendo a posição do torque do motor no centro de referência, o sentido de cada torque viscoso contrário ao do movimento imposto pelo motor, e a força de resistência do ar no centro do pistão, com sentido negativo em x e fórmula (que já considera todos as quatro partes do ciclo termodinâmico na câmara).

$$\text{IF}(XPp: \text{IF}((P\text{MAX}^*VM^{**k})/((.sistema.e+l-.sistema.XP)^*.sistema.A+VM)^{**k})-PMIN: PMIN,$$

$$PMIN, ((P\text{MAX}^*VM^{**k})/((.sistema.e+l-.sistema.XP)^*.sistema.A+VM)^{**k})), \text{ IF}(.sistema.XP-l:$$

$$PMIN, 0, P\text{MAX}), \text{ IF}(((PMIN*(V\text{MAX}+VM)^{**k})/((.sistema.e+l-.sistema.XP)^*.sistema.A+VM)^{**k})-$$

$$((.sistema.e+I\cdot sistema.XP)^{*}.sistema.A+VM)^{**k})-P_{MAX} : (PMIN*(V_{MAX}+VM)^{**k})/((.sistema.e+I\cdot sistema.XP)^{*}.sistema.A+VM)^{**k}, P_{MAX}, P_{MAX})^{*}.sistema.A-P_{ATM}^{*}.sistema.A$$

Para simular o sistema, basta se utilizar a função “Simulate” do menu superior e escolher “Interactive Controls”. Dentro do menu que se abrir, para que a simulação seja veloz deve-se retirar a opção “Update graphics display”. Para os gráficos ficarem adequados deve-se aumentar o número de passos em “Steps” e o tempo final de integração é dado ao lado de “End Time”. Além disso, para se melhorar a simulação, deve-se utilizar a opção “Dynamic” em “Sim. Type”, e depois clicar em “Simulation Settings...” e alterar o “Error” e “Hmax” (sugestão: máximo de 1e-8 e 1e-6, respectivamente, e se não funcionar, diminuir ainda mais).

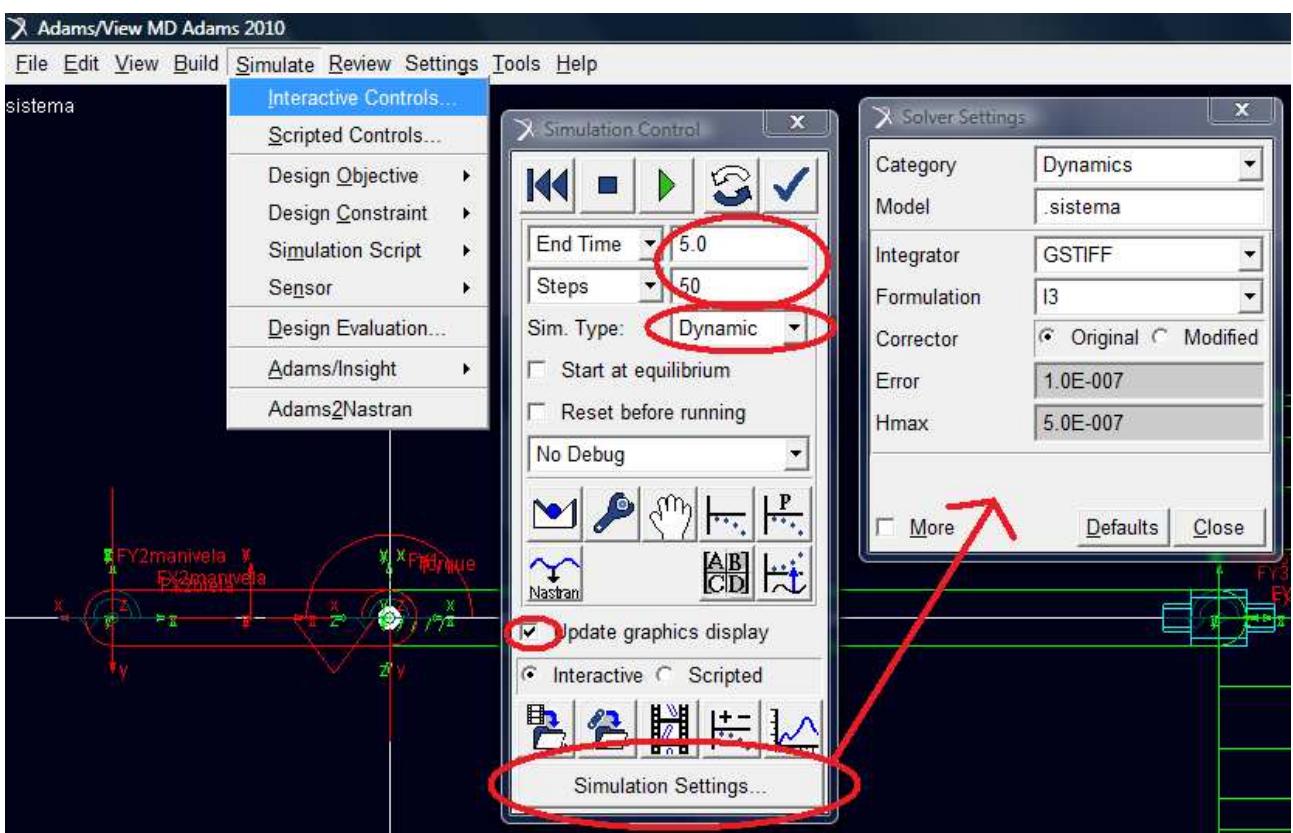


Figura 100: Controle de Simulação

Após a simulação, deve-se utilizar o “Post Processor” para se avaliar os resultados, na terceira coluna da quarta linha do menu “Main Tool”. Pode-se então criar diferentes páginas com diferentes gráficos. Para se adicionar um gráfico, basta selecionar a medida e “add curve” e para trocar de curva basta utilizar “surf” e em seguida selecionar a medida. Se for necessário se plotar uma curva não em função do tempo, mas em função

de outra medida, como por exemplo para a órbita da excentricidade de uma junta, pode-se utilizar o botão “Data” em baixo de “Independent Axis”.

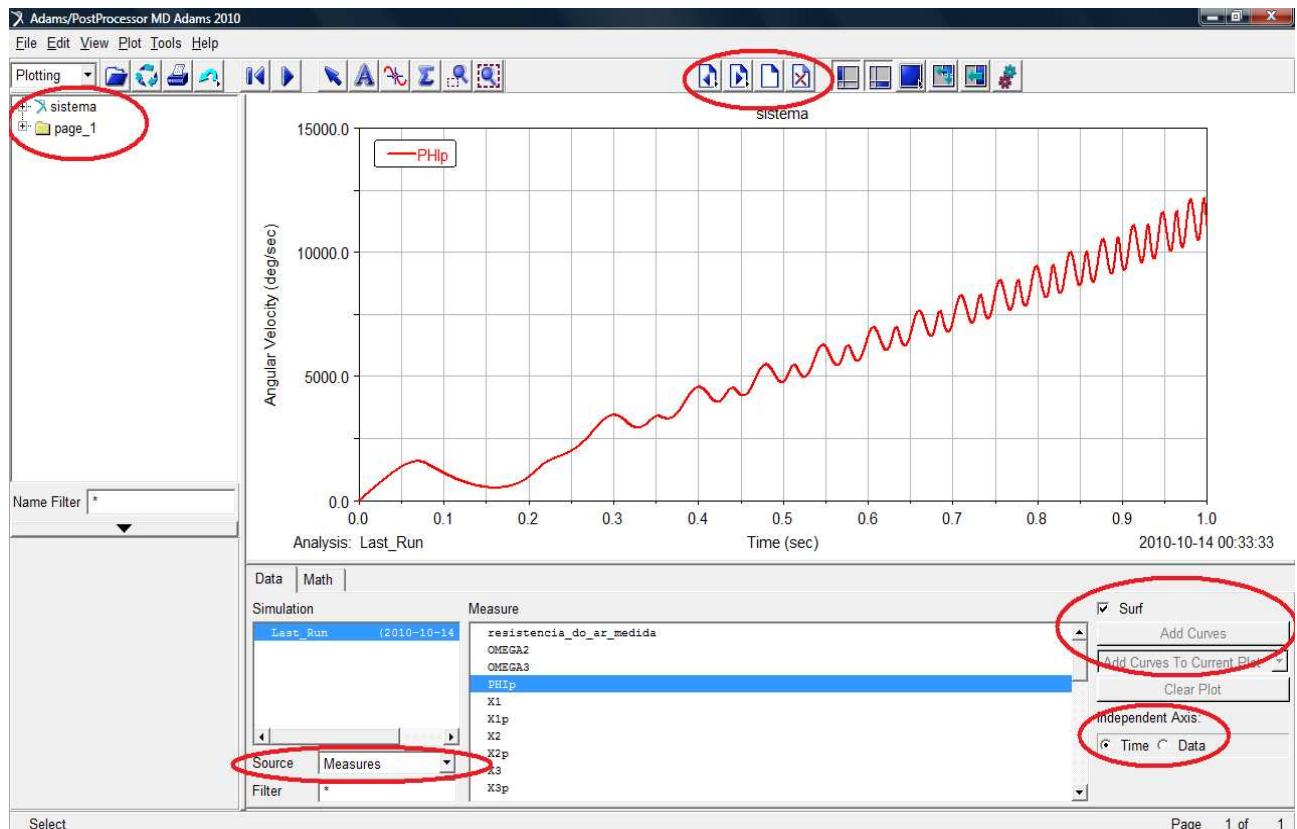


Figura 101: Post Processor